

# DMD e Computer Generated Holography

Luigi Loreti

## Abstract

L'utilizzo di micromirror per la visualizzazione di Computer Generated Hologram con il sistema di codifica di Lee e Burckhardt.

## Point-Holography per immagini tridimensionali

L. Loreti,  
*proper affiliation (LCD systems?)*

Viene proposto un sistema completo per visualizzazione di immagini tridimensionali. Una combinazione di stereoscopia ed olografia permette la creazione dinamica di immagini tridimensionali utilizzando dispositivi micromirror (DMD) per la visualizzazione sequenziale di ologrammi puntiformi generati via computer (CGH) partendo da una serie di immagini stereo. I dettagli del sistema ed i suoi limiti sono descritti. Questo sistema, quando implementato, rappresenta un serio candidato per la televisione tridimensionale.

## INTRODUZIONE

Vari tentativi sono stati fatti per ottenere immagini tridimensionali in tempo reale (3DTV), da quelli ottenuti con l'aiuto di occhiali (anaglifi, polarizzati, a LCD), tutti verso la direzione di presentare due immagini separate agli occhi e poter quindi sfruttare la visione binoculare, a tentativi con sistemi di microlenti, per fare in modo che ogni occhio, in una certa posizione, vede due immagini diverse. Sono tutti sistemi che non convincono sia per l'utilizzo di sistemi esterni (occhiali) che costringono la visione, sia per il numero limitato di punti di visione (microlenti) che costringono ad una staticità dello spettatore.

Da tutti è stata sempre riconosciuta la superiorità delle immagini olografiche, che danno una visione completa ed illimitata dell'oggetto ripreso in tutte le sue sfumature e punti di vista. Alcuni tentativi sono stati fatti per realizzare immagini olografiche dinamiche che hanno sempre cozzato contro l'enorme quantità di dati presenti in una immagine olografica e nella limitatezza delle tecnologie esistenti, riuscendo quindi a visualizzare immagini video olografiche di qualche centimetro e con pochi frames al secondo.

La nascita di nuovi dispositivi ottici, in particolare i micromirror, permette ora, tramite opportuni procedimenti, di realizzare display olografici di dimensioni notevoli sfruttando la velocità di commutazione e di caricamento delle immagini nel DMD.

## OLOGRAMMA DI UN PUNTO

Richiamiamo brevemente i concetti basilari che regolano l'olografia ottica e la formazione di una immagine in un sistema ottico generico, considerato qui come un canale di informazione.

Un ologramma non è nient'altro che in modello di interferenza tra un'onda oggetto ed un'onda di riferimento. Facendo interferire due raggi coerenti, l'informazione di fase (che è connessa

con la profondità o tridimensionalità) è codificata nella modulazione delle frange di interferenza registrate su di uno schermo.

Dopo aver illuminato un ologramma con una riproduzione dell'onda di riferimento usato nella registrazione, appariranno nello spazio una immagine reale ed una virtuale. Mentre per un oggetto generico 3D, la registrazione ed il calcolo dell'ologramma richiede un supporto di calcolo notevole, l'ologramma di un punto è un caso abbastanza semplice, che può essere trattato esplicitamente e riprodotto facilmente in un sistema reale.

Assumiamo che un punto sorgente è localizzato sull'asse ottico ad una certa distanza  $z$  rispetto lo schermo olografico, come in fig.1(a). Fisicamente, consideriamo una illuminazione piana di ampiezza normalizzata lungo  $z$ .

$$Y_i = e^{ikz} \quad (1)$$

e descriviamo l'oggetto punto come una sorgente di un onda sferica che si propaga radialmente da un punto dell'asse ottico

$$Y_o = \frac{1}{kR} e^{ikR} \quad (2)$$

dove  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  è il numero d'onda dell'illuminazione e  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ ,  $r$  essendo la coordinata radiale sul piano olografico ( Fig. 1).

Considerando che nell'approssimazione parassiale ( $r \ll z$ , che implica  $R \approx z + \frac{r^2}{2z}$ ) possiamo scrivere l'onda oggetto come

$$Y_o = \frac{1}{kz} e^{ikz} e^{i\frac{kr^2}{2z}} \quad (3)$$

viene quindi diretto scrivere l'intensità registrata su di uno schermo posizionato alla distanza  $z$  dall'oggetto:

$$I = |Y_i + Y_o|^2 = \left| 1 + \frac{1}{kz} e^{i\frac{kr^2}{2z}} \right|^2 = 1 + \frac{1}{k^2 z^2} + \frac{2}{kz} \cos\left(\frac{\pi r^2}{\lambda z}\right) \quad (4)$$

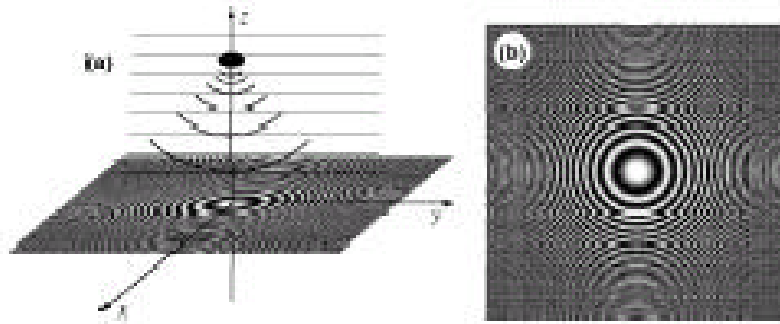


FIG. 1: (a) Schema di una registrazione di un ologramma (b) Gabor zone plate bidimensionale dell'ologramma di un punto.

Analizzando il grado di libertà nella definizione di intensità dell'onda, possiamo semplificare la precedente espressione finché si arriva alla semplice formulazione della Gabor Zone Plate:

$$I = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{pr^2}{Iz} \right) \right] \quad (5)$$

che deve essere considerata come una funzione di trasmissione da applicare all'ologramma per poter ricostruire l'immagine dell'oggetto punto nello spazio.

L'eq. (5) permette il calcolo del cosiddetto *computer generated hologram* (CHG) di un oggetto puntiforme situato sull'asse ottico. Per gli oggetti fuori dall'asse ottico, bisogna generalizzare il CGH: se l'oggetto è localizzato ad un punto  $(x, y)$  fuori dell'asse, le frange di interferenza saranno centrate su  $(x, y)$  piuttosto che sull'origine dello schermo olografico  $(0, 0)$ . Un disegno di densità di un punto olografico è raffigurato in fig1(b) per i seguenti valori dei parametri  $A=500$  nm,  $z=1$  m and total width = 1 cm.

Verifichiamo brevemente ora che, una volta codificato la Gabor zone plate, su una sorta di schermo trasparente (o riflettente) ed illuminato con una onda piana, otteniamo la ricostruzione del fronte d'onda originale.

Semplicemente, consideriamo l'eq. (5) come una funzione di trasmissione che modula un fronte d'onda incidente piana  $\psi(i)$  (assumiamo che l'uso della stessa onda impiegata per il calcolo dell'ologramma), possiamo descrivere l'onda che si propaga dallo schermo tramite l'integrale di convoluzione standard di Kirchoff Fresnel, che è un modo compatto per esprimere il principio di Huygens-Fresnel (ogni punto dell'ologramma agisce come una sorgente di un'onda sferica, interferendo coerentemente con ogni altro punto sorgente dello stesso ologramma)

$$\Psi(Z) = I * \exp(ikr^2/2Z)$$

Dove il simbolo  $*$  sta per convoluzione, e  $Z$  è la distanza dallo schermo olografico, sul lato opposto rispetto la posizione originale dell'oggetto.

Facendo la convoluzione attraverso lo spazio di Fourier, scrivendo cioè:

$$\psi(h) = \text{antiT}(t(f)) \dots$$

E considerando che, in coordinate polari:

$$T dF$$

Possiamo valutare l'onda ricostruita alla distanza  $Z$  dallo schermo dal seguente integrale:

La cui soluzione è  $\psi(Z) = \dots$  con  $\psi(0) = 1/2$

Rappresentante il beam non modificato trasmesso (un'onda piana propagata su  $z$ ,

$$\psi_+$$

rappresentante un'onda sferica (scritta in approssimazione parassiale) che si emana da una distanza  $(Z+z)$  che è la posizione dell'oggetto originale, ed è localizzata dietro lo schermo olografico (questa è l'immagine virtuale) e

$$\psi_-$$

rappresentante un'altra onda sferica che proviene dal punto  $(Z-z)$  (questa è l'immagine reale che appare fuori dallo schermo).

È interessante notare che quando si sceglie  $Z=z$ , cioè quando si osserva la funzione d'onda nel punto simmetrico speculare rispetto la posizione originale dell'oggetto, l'immagine reale diverge, indicando che il punto nello spazio che ha coordinate  $(0,0, z+Z)$  si comporta esattamente come un punto sorgente, cioè emette un'onda sferica.

Questo è quello che dovrebbe apparire all'occhio dell'osservatore situato da qualche parte lungo l'asse  $z$  distante dallo schermo: una sorgente di luce nello spazio, che ha origine da un punto a distanza  $Z$  dallo schermo.

## LINE Hologram

Non essendo possibile per ragioni di banda passante scrivere un ologramma bidimensionale sul display o trasparente, dobbiamo ridurre la dimensionalità dell'ologramma.

Piuttosto che scrivere l'intero Gabor Zone Plate, ne prendiamo la parte centrale. Se consideriamo uno schermo rettangolare di lunghezza  $L$  ed altezza  $h$ , l'ologramma codificato sullo schermo sarà:

$$(13)$$

Possiamo ora seguire lo stesso procedimento fatto precedentemente e derivare la propagazione dell'onda olografica dallo schermo quando è illuminato da una sorgente piana e coerente.

Le Equazioni 6 e 7 sono ancora valide, ma ora non possiamo utilizzare la simmetria radiale, così l'equazione 8 deve essere modificata. Comunque, le direzioni x e y sono indipendenti ( per il principio di sovrapposizione) per cui il calcolo dell'integrale è sempre possibile.

Rimando in coordinate Cartesiane (dove lo spazio di Fourier ha coordinate qx e qy) possiamo scrivere:

TsF

Integrale  
Soluzione

Come prima possiamo valutare l'onda ricostruita alla distanza Z dallo schermo tramite l'eq (7) che ora diventa:

(15)

le cui soluzioni possono essere scritte come

$\psi(z)$

con  $\psi(0) = 1/2$

rappresentate il raggio di riferimento (un onda piana propagatesi su z)

$2H(Z) =$

rappresentate

### Fourier Transform Hologram

Immaginiamo (fig. 1) un'onda piana che illumina un oggetto bidimensionale che ampiezza di trasmittanza  $t(\xi, \eta)$ , posto nel piano focale frontale di una lente. Il piano di osservazione è situato nel piano focale posteriore della lente. Se ignoriamo l'effetto di vignettizzazione della lente dovuta alla sua apertura di dimensioni finite, l'ampiezza complessa del campo ottico nel piano focale posteriore è descritta dalla trasformata di Fourier dell'ampiezza della trasmittanza di ingresso.

$$U_f(u, v) = \iint t(z, h) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda f} (zu - hv)} dz dh$$

dove  $\xi, \eta$  . sono le coordinate spaziali sul piano oggetto,  $u, v$  sono le coordinate spaziali nel piano dell trasformata di Fourier. LA distanza focale della lente è  $f$ ,  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della luce illuminante. L'ampiezza complessa  $U_f(u, v)$  nel piano dell'ologramma è calcolata, codificata e registrata usando un sistema ottico (film, diapositiva, CCD) . L'oggetto originale potrebbe anche non esistere –data la funzione di trasmittanza  $t(\xi, \eta)$ , così può usare un computer per calcolare la distribuzione del campo ottico nel piano dell'ologramma e quindi codificare e registrare la

distribuzione del campo calcolato.

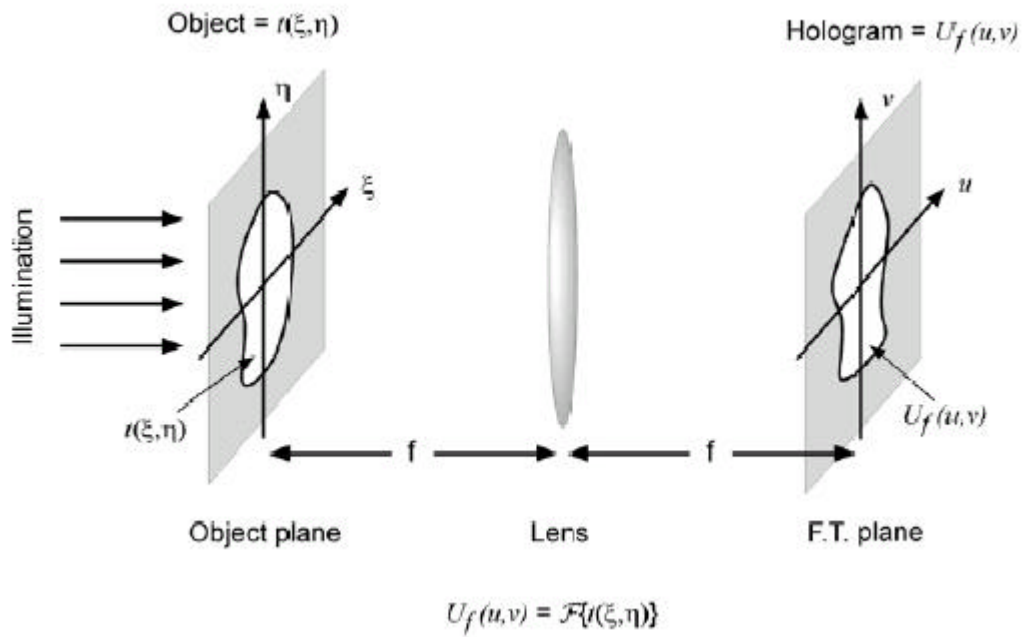
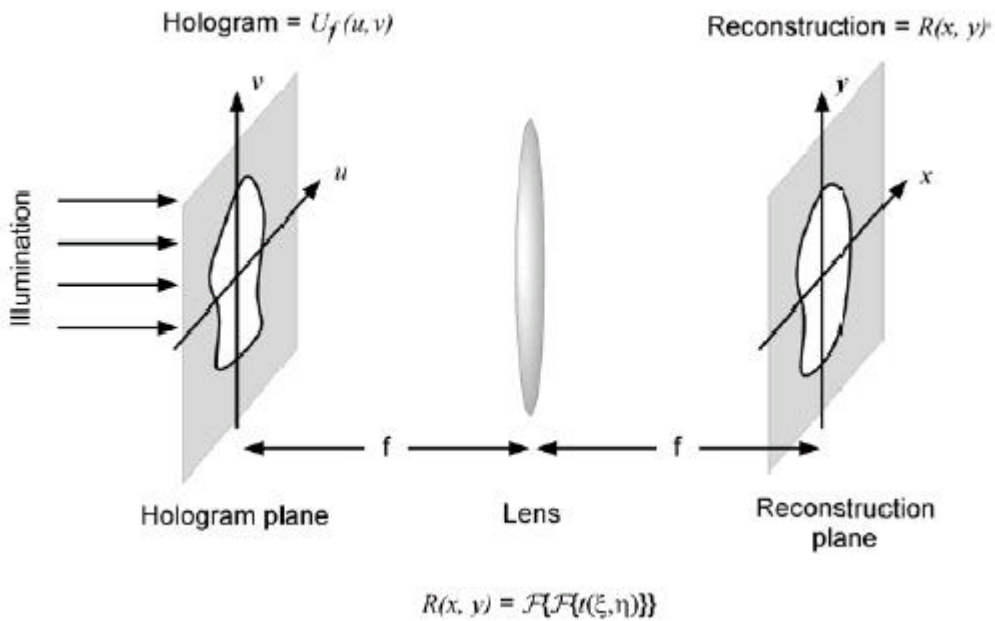


Fig. 1: Setup per la registrazione di un ologramma di Fourier

Siccome l'ologramma contiene informazioni sulla trasformata di Fourier dell'oggetto originale, la procedura di ricostruzione deve coinvolgere la trasformata inversa di Fourier dell'ologramma registrato. Una lente A, come mostrato in fig. 2, è normalmente usata per fare questa trasformazione che comunque è una trasformata di Fourier.



Il processo di creare un CGH (computer-generated hologram) può essere diviso nei seguenti passi:

1. Scegliere l'oggetto
2. Calcolare I fronti d'onda dell'oggetto sul piano dell'ologramma.
3. Codificare il fronte d'onda calcolato in trasmittanza dell'ologramma e produrre un trasparente.
4. Ricostruzione ottica dell'immagine usando l'ologramma (Optical decoding of hologram transmittance)

### Scelta dell'oggetto

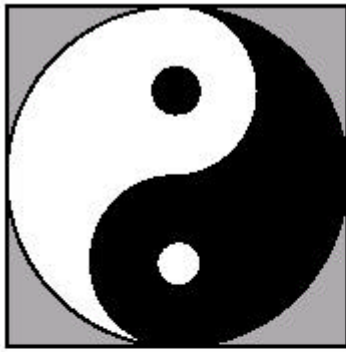
Siccome l'ologramma è calcolato dal computer, tutti I dati devono essere in forma digitale . L'immagine di ingresso è campionata nello spazio e nell'ampiezza. Per un oggetto con funzione di trasmissione  $t(x, y)$  si può definire una funzione di campionamento spaziale  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right),$$

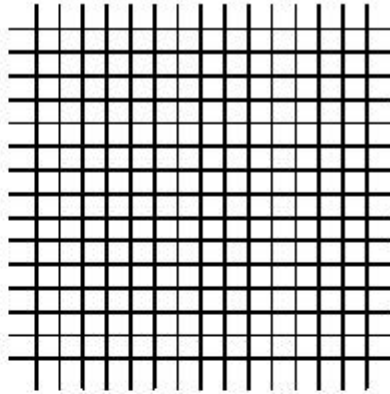
dove  $X, Y$  sono I periodi di campionamento nelle direzioni  $x, y$  . L'ampiezza della trasmittanza spaziale campionata è quindi rappresentata da

$$t_s(x, y) = f(x, y)t(x, y) = \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)t(x, y)$$

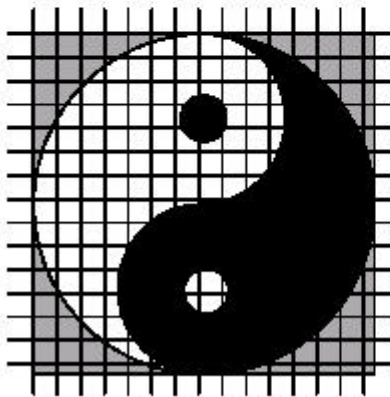
Questo processo di campionamento è rappresentato in fig.3.



Original amplitude transmittance



Spatial sampling function



Sampling process



Sampled amplitude transmittance

E' intuitivamente chiaro che se I campioni sono presi abbastanza vicini, l'immagine campionata diventa una fedele rappresentazione dell'immagine originale. Per una immagine con banda limitata (con spettro spaziale che soddisfa  $-B_x < f_x < B_x$ ,  $-B_y < f_y < B_y$ ) il periodo di campionamento deve soddisfare il criterio di Nyquist:

$$X \leq \frac{1}{2B_x}, \quad Y \leq \frac{1}{2B_y}$$

per preservare completamente l'informazione dell'immagine originale. Periodi di campionamento inferiori a quelli di Nyquist danno la generazione di *aliasing* nel dominio delle frequenze spaziali.

Per un dato oggetto, il campionamento spaziale può essere ottenuto usando uno scanner ottico, una camera o dispositivo simile. Alternativamente, si può creare una immagine aster direttamente con un computer. L'immagine campionata  $ts(x, y)$  può essere rappresentata nel computer come una matrice bidimensionale. Ogni elemento della matrice indica l'informazione dell'ampiezza, mentre gli indici della matrice  $n, m$  dell'elemento corrispondono alla locazione spaziale come in fig. 4



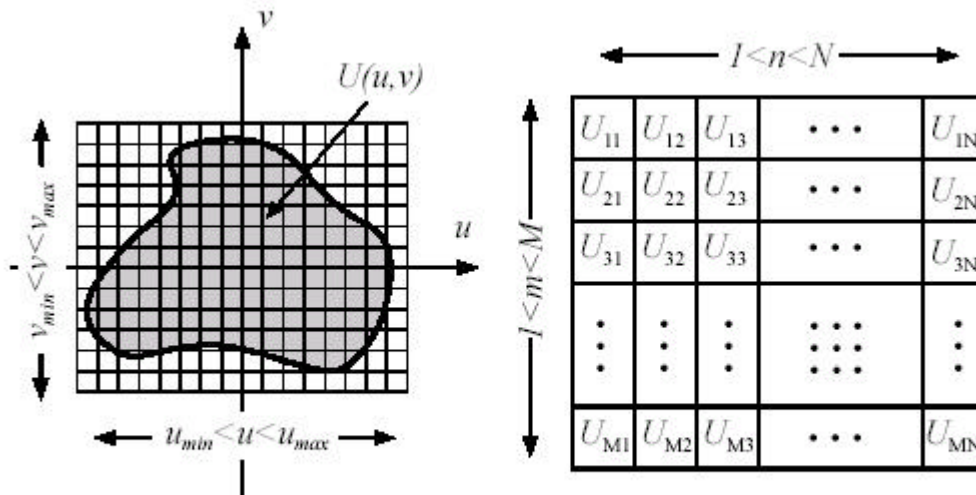


Fig. 4: Continuous image and matrix representation of the sampled image

Fig. 4: Continuous image and matrix representation of the sampled image

### Calcolo del fronte d'onda dell'oggetto nel piano olografico

Dopo che l'oggetto è stato campionato con il giusto periodo si può calcolare la distribuzione del campo ottico nel piano olografico usando la trasformata Discreta di Fourier, che in una dimensione è data da::

$$X[k] = \sum_{j=1}^N x[j] e^{-\frac{2\pi i}{N}(j-1)(k-1)}$$

$$x[j] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X[k] e^{\frac{2\pi i}{N}(j-1)(k-1)}$$

dove  $x[j]$  è una sequenza in una dimensione di campionamenti,  $X[k]$  è il suo spettro discreto,  $N$  è il numero di campioni totali nella sequenza e  $j, k$  sono gli indici di campionamento. Uno dei metodi più veloci per calcolare la TdF è usare l'algoritmo FFT, che richiede che il numero totale di campioni sia una potenza di 2.

### Codifica del fronte d'onda calcolato in un ologramma di trasmissione.

Il campo ottico calcolato sul piano dell'ologramma contiene l'informazione di ampiezza e fase. Per una ricostruzione dell'ologramma tali informazioni debbono essere registrate sul mezzo ottico (lastra fotografica, trasparente, ecc.) Anche se è possibile produrre una lastra con le desiderate ampiezze e fasi il processo è abbastanza complicato. Molte tecniche sono state sviluppate per codificare la distribuzione del campo ottico calcolato nell'ologramma. Queste tecniche permettono la registrazione dell'ampiezza complessa usando solo modulazioni di ampiezza. Uno dei metodi è quello proposto da Lee e Burckhardt, che sono delle modifiche del detour-phase encoding introdotto da Lohmann.

Nella tecnica detour-phase il piano ologramma è diviso in un array 2D di celle come in fig. 5. La cella rappresenta uno schermo scuro con una piccola apertura (subcella) di dimensioni variabili e posizione variabile nella cella. L'ologramma è illuminato con una sorgente di luce coerente.

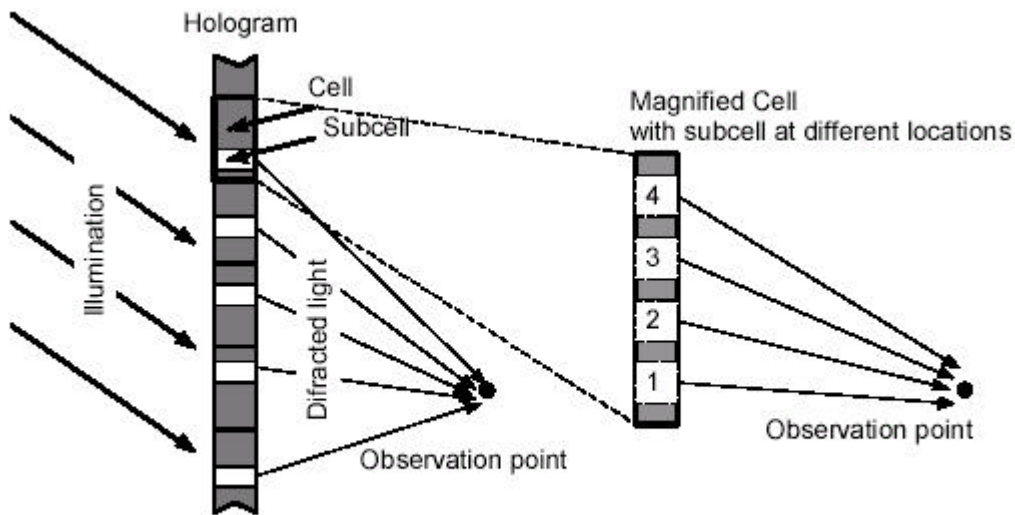


Fig. 5: Detour-phase hologram encoding concept.

Fig. 5: Detour-phase hologram encoding concept.

LA luce si diffrange ad ogni apertura ed arriva al punto di osservazione da ogni cella con una certa ampiezza e fase. L'ampiezza della luce che arriva è controllata dalle dimensioni dell'apertura (la quantità di luce che passa dentro), mentre la fase dipende dalla locazione relativa dell'apertura dentro la cella. Quindi l'informazione di ampiezza e fase sono memorizzate utilizzando solo una modulazione di ampiezza della luce.

Il primo detour-phase CGH sviluppato da Lohmann fu stampato sulla carta e quindi fotoridotto da una macchina fotografica. Questa tecnica implica che le dimensioni dell'apertura come anche la sua posizione debbano essere controllate con precisione – assumendo che ci fosse una distribuzione continua di dimensioni e di posizione. I dispositivi di stampa, comunque, processavano dati discreti, il che portò alla modifica di Lee and Burckhart.

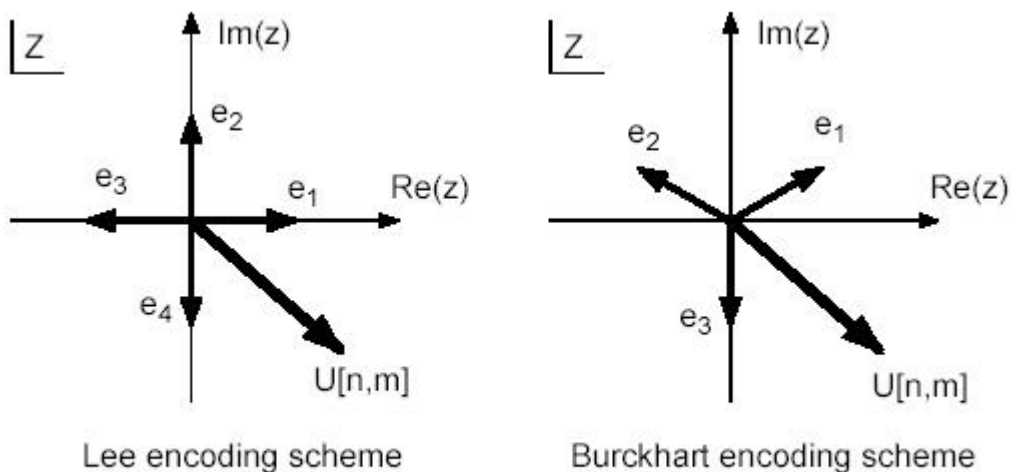


Fig. 6: Lee and Burckhart hologram encoding techniques.

Dopo che la matrice dell'ologramma  $U[n,m]$  è calcolata, ogni elemento della matrice contiene un dato complesso che deve essere codificato. L'elemento  $U[n,m]$  può essere rappresentato come un vettore nel piano complesso, come in fig. 6. Normalmente, solo due vettori base, –lungo l'assente reale ed immaginario, rappresentano il valore dell'elemento.

Inoltre, le parti reali ed immaginarie possono avere valori negativi che non possono essere rappresentati da tecniche di modulazione di ampiezza. Lee introdusse due vettori base addizionali. Nel suo schema i quattro vettori base hanno uno spostamento di fase relativo di  $\pi/2$  e un valore arbitrario complesso può essere rappresentato dalla somma:

$$U[n, m] = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_4 e_4,$$

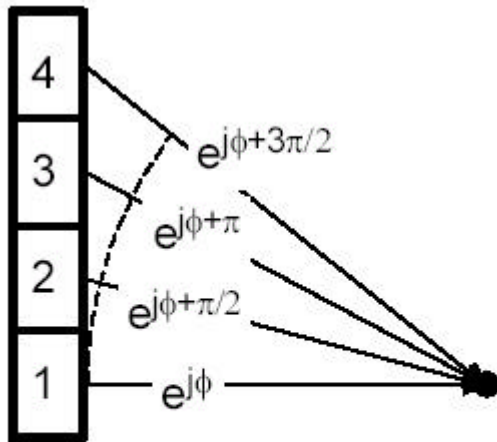


Fig. 7: Relative phase delay between four apertures (base vectors) in Lee's encoding technique.

dove  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sono le proiezioni di  $U[n, m]$  nei vettori base e sono presi solo i valori positivi. Due dei coefficienti  $A_i$  sono sempre uguali a 0 per ogni cella  $U[n, m]$ .

Si può immaginare che ogni vettore base corrisponda ad una locazione di una apertura all'interno della cella del detour-phase hologram. Quindi il ritardo di fase relativo tra i vettori base corrisponde al ritardo di fase dovuto alla differenza di cammino della luce diffratta da differenti aperture, come in fig. 7.

Per implementare questo schema di codifica la matrice originale dell'ologramma  $U$  con dimensioni  $N \times M$  è rappresentata da una matrice  $4N \times M$   $U_1$  sostituendo in ogni elemento della matrice di  $U$  con quattro proiezioni  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . La cella dell'ologramma ora occupa 4 elementi della matrice  $U_1$  (Fig. 8b). Quando la matrice è stampata, questo fatto deve essere tenuto da conto per far combaciare la dimensione orizzontale e verticale delle celle. Si può farle combaciare ripetendo ogni riga della matrice  $U_1$  quattro volte, come in fig. 8c. Dopo questa procedura, la matrice può essere stampata con la stessa risoluzione nella direzione verticale ed orizzontale. Siccome il più delle volte la stampa è binaria (bianco e nero) la seconda dimensione è utilizzata per codificare l'ampiezza. Fig. 8d. Tutti i valori di ampiezza sono divisi in 5 livelli discreti per la codifica di Lee.

La matrice di fig. 8d può essere facilmente stampata. Ha informazione di ampiezza e fase del campo ottico ottenuto tramite il setup di fig. 2.

Per rappresentare un numero complesso solo con numeri positivi è sufficiente utilizzare solo tre vettori base, come in fig. 6. Lo schema di codifica di Burckhart è simile a quello di Lee ma usa soltanto 3 vettori base.

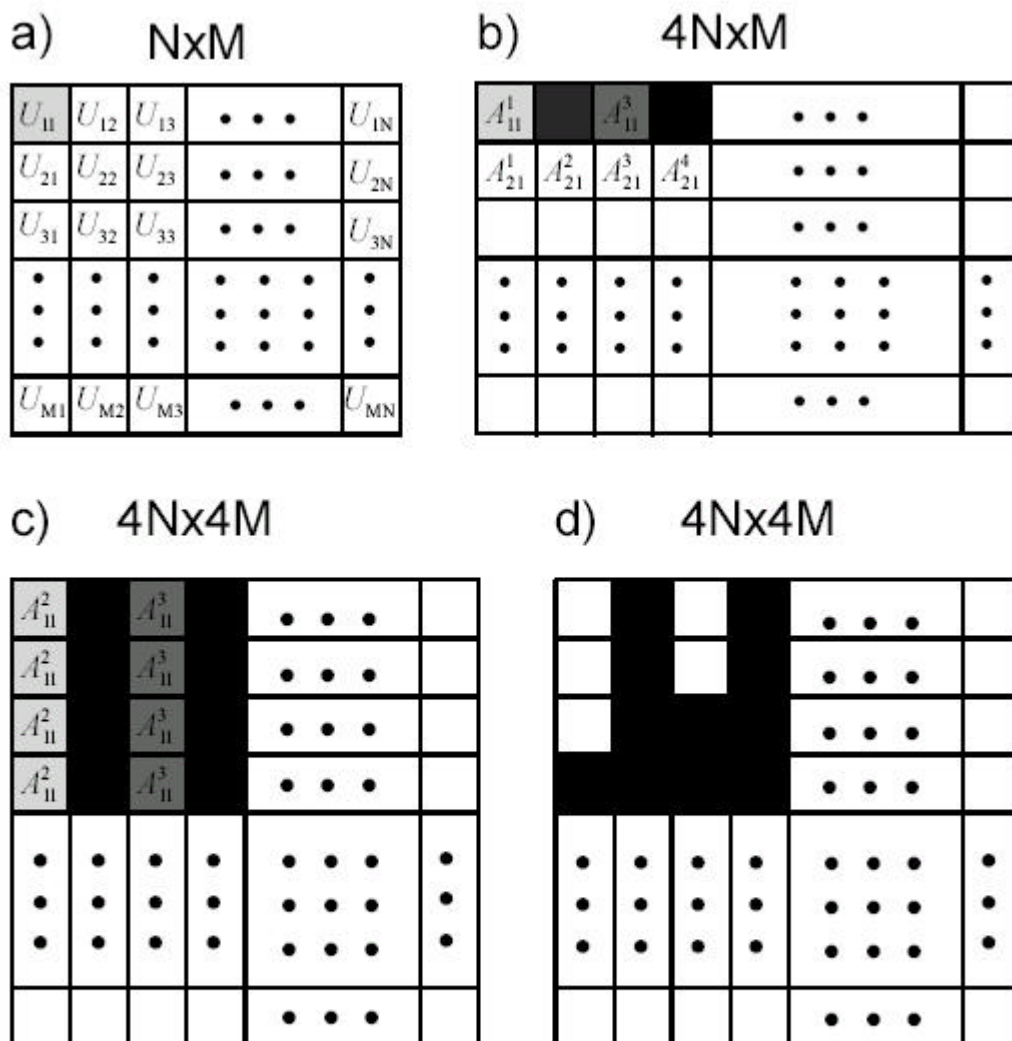


Fig. 8: Binary phase and amplitude encoding using Lee's technique.

- a) Calculated hologram matrix
- b) Expanded matrix with phase encoded using four projections
- c) Expanded matrix with compensated cell dimension mismatch
- d) Expanded matrix with binary amplitude and phase encoding

Fig. 8: Binary phase and amplitude encoding using Lee's technique.

- a) Calculated hologram matrix
- b) Expanded matrix with phase encoded using four projections
- c) Expanded matrix with compensated cell dimension mismatch
- d) Expanded matrix with binary amplitude and phase encoding

### Ottimizzazione della dinamica di un CGH ed efficienza di diffrazione

LA *Efficienza di diffrazione* di un CGH è la frazione della potenza ottica che appare in ogni singolo ordine di diffrazione del CGH.

Per una migliore ricostruzione e rapporto segnale disturbo nel piano di ricostruzione dell'immagine bisogna massimizzare l'efficienza di diffrazione. Ci sono due modi per ottenere questo, il top clipping e la phase randomization.

During phase randomization the object amplitude transmittance function is multiplied by

a random phase distribution. The energy is distributed more evenly in the spatial spectrum domain. As a result, better dynamic range and smaller peak-to-average ratio for the CGH are achieved, while random phase in the reconstruction plane is not observed by human eye.

To perform top clipping, the spatial spectrum of the object is multiplied by a positive constant to make the maximum modulus greater than 1. Then all modulus values greater than 1 are set equal to 1. This procedure decreases peak-to-average ratio, but affects the reconstructed image: edges are enlarged.