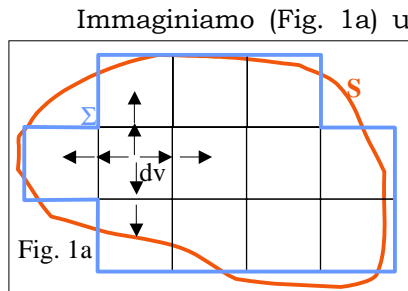


CAP. VII

ONDE ELETTROMAGNETICHE.

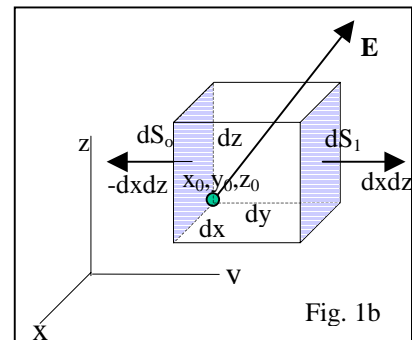
VII.1- OPERATORE DIVERGENZA. DEFINIZIONE E SIGNIFICATO .



Immaginiamo (Fig. 1a) una superficie chiusa S tracciata in uno spazio in cui è definito un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  che assumeremo ovunque regolare, cioè continuo e derivabile. Scomponiamo il volume  $v$  contenuto in S in tanti cubetti infinitesimi  $dv$ : è evidente che il flusso uscente da uno di essi costituisce un flusso entrante per i cubetti adiacenti, per cui la somma dei flussi  $d\Phi_i$  uscenti dai vari volumetti  $dv_i$  è eguale al flusso uscente dalla superficie  $\Sigma$  con cui i cubetti

approssimano la superficie S. Lo stesso vale, ovviamente, per i flussi  $d\Phi_i$  entranti, per cui avremo  $\Phi_S \approx \Phi_\Sigma = \sum_i d\Phi_i$ .

Sia allora  $dv$  (Fig. 1b) uno di questi volumetti, di lati infinitesimi  $dx, dy, dz$  paralleli agli assi e che ha uno dei suoi vertici nel punto P di coordinate  $x_0, y_0, z_0$ . Sia  $d\Phi$  il flusso di  $\mathbf{u}$  attraverso la superficie chiusa che racchiude  $dv$ .  $d\Phi$  si può esprimere come la somma dei flussi attraverso le tre coppie di facce opposte del cubo. Detto semplicemente  $\mathbf{u}$  il campo nel punto di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  ed  $u_x, u_y, u_z$  le sue componenti, il flusso di  $\mathbf{u}$  attraverso le due facce perpendicolari all'asse  $y$  risulta essere:



$$d\Phi_y = -u_y dx dz + \{u_y + (\partial u_y / \partial y) dy\} dx dz = (\partial u_y / \partial y) dy dx dz = (\partial u_y / \partial y) dv$$

Lo stesso vale per le altre due coppie di facce, per cui  $d\Phi$  assume l'espressione:

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = [(\partial u_x / \partial x) + (\partial u_y / \partial y) + (\partial u_z / \partial z)] dv .$$

La somma:  $\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z$

è detta **divergenza** di  $\mathbf{u}$  e si indica con  $\text{div} \mathbf{u}$ . Segue, dalle considerazioni fatte a proposito di fig. 1a, il **Lemma di Green**:

$$\Phi = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \text{div} \mathbf{u} dv$$

Ricordiamo ora che, assunto per il campo elettrostatico  $\mathbf{E}$  di una carica puntiforme un andamento come  $1/r^2$ , abbiamo dimostrato il teorema di Gauss enunciato come segue:

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \frac{\rho}{\epsilon_0} dv = \text{per il lemma di Green} = \int_v \text{div} \mathbf{E} dv .$$

dove  $\rho$  rappresenta la densità della carica distribuita con continuità nello spazio.

Per la eguaglianza delle funzioni integrande in  $dv$ , possiamo pertanto scrivere:

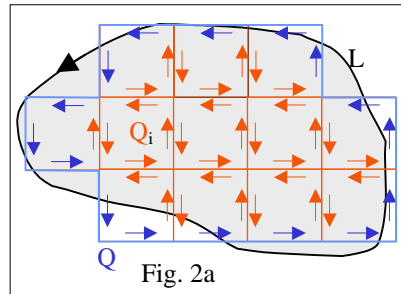
$$\text{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 .$$

valida punto per punto in tutto lo spazio. Alla divergenza di  $\mathbf{E}$  si attribuisce il significato di **densità** (volumetrica) **di flusso** del campo. Abbiamo così l'enunciato del teorema di Gauss **in forma locale**: punto per punto, la densità di carica e la densità di flusso del campo da essa prodotto sono grandezze direttamente proporzionali.

VII.2 – ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE. DEFINIZIONE E SIGNIFICATO.

Dimostriamo innanzitutto una proprietà della circolazione assumendo che il cammino chiuso L sul quale la calcoliamo giaccia su un piano, poi generalizzeremo questa proprietà al caso in cui L sia tracciata in uno spazio a tre dimensioni.

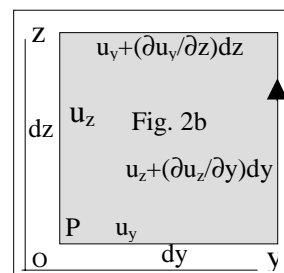
Sia dunque L (Fig. 2a) un cammino chiuso giacente su un piano ed  $\mathbf{u}$  un campo vettoriale regolare (continuo e derivabile). Sia S la superficie piana racchiusa da L. Scomponiamo S in tanti quadratini  $Q_i$  eguali in modo da ricoprirla tutta salvo ai bordi, dove la superficie ed i quadratini non coincideranno anche se con i lati dei quadratini si potrà sempre costruire una poligonale Q che approssima L bene quanto si vuole.



Orientiamo ora L ed orientiamo concordemente ad essa tutti i quadratini interni. Anche Q risulta orientata concordemente ad L. Sia  $C_i$  la circolazione di  $\mathbf{u}$  calcolata sul quadratino i-esimo. La circolazione calcolata su Q è eguale alla somma delle circolazioni  $C_i$  calcolate sui singoli quadratini in quanto i contributi alla somma provenienti dai lati interni a Q si elidono a due a due, essendo questi ultimi sempre percorsi nei due sensi.

In conclusione, se suddividiamo S in quadratini di lato infinitesimo, per cui possiamo esprimere con  $dC_i$  la circolazione calcolata sul quadratino i-esimo, la circolazione calcolata lungo Q approssimerà a meno di infinitesimi di ordine superiore la circolazione calcolata lungo L, per cui possiamo assumere

$$\oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{L} \approx \sum_i dC_i$$



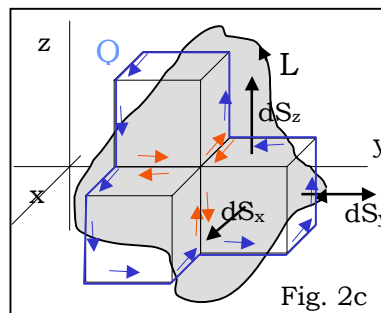
Le  $dC_i$  si possono esprimere in termini delle componenti di  $\mathbf{u}$  e delle loro derivate. Con riferimento a fig. 2b, dove abbiamo rappresentato il quadratino i-esimo, di lati  $dy$  e  $dz$  e superficie  $dS=dydz$ , la circolazione di  $\mathbf{u}$ , assunto  $\mathbf{u}$  di componenti  $u_y$  e  $u_z$  in P, si scrive infatti:

$$dC = u_y dy + \left( u_z + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy \right) dz - \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \right) dy - u_z dz = \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dy dz$$

per cui 
$$C = \oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dS$$

Il termine tra parentesi si può interpretare come una densità superficiale di circolazione.

In uno spazio a tre dimensioni una superficie S di contorno L si può approssimare con una serie di terne di quadratini di lato infinitesimo, contigui e paralleli ai piani coordinati, dove si suppone che ciascuna terna costituisca una approssimazione di un elemento  $dS$  della superficie S (fig. 2c). Orientata L risultano automaticamente orientati i quadratini componenti ciascuna terna. La circolazione lungo L si approssima ancora con la somma delle circolazioni elementari  $dC_i$  calcolate sui singoli quadratini.



In conclusione la somma delle circolazioni elementari si riduce alla circolazione calcolata lungo la poligonale Q dei lati non in comune, che approssima L a meno di infinitesimi di ordine superiore .

Detta  $dC_x$  la circolazione elementare relativa a quadratini paralleli al piano yz essa si esprime, analogamente a pag. precedente, come:  $dC_x = (\partial u_z/\partial y - \partial u_y/\partial z)dydz$   
 e, con calcoli analoghi, per quadratini paralleli al piano xz:  $dC_y = (\partial u_x/\partial z - \partial u_z/\partial x)dx dz$   
 per quadratini paralleli al piano xy:  $dC_z = (\partial u_y/\partial x - \partial u_x/\partial y)dxdy$

Si definisce **rotore** di un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  il vettore di componenti:

$$(\mathbf{rotu})_x = (\partial u_z/\partial y - \partial u_y/\partial z), \quad (\mathbf{rotu})_y = (\partial u_x/\partial z - \partial u_z/\partial x), \quad (\mathbf{rotu})_z = (\partial u_y/\partial x - \partial u_x/\partial y)$$

Poiché:  $dS_x = dydz$ ,  $dS_y = dx dz$ ,  $dS_z = dx dy$

sono le componenti del vettore  $d\mathbf{S}$ , la circolazione elementare calcolata sulla linea chiusa orientata  $dL$  contenente  $dS$  risulta essere:

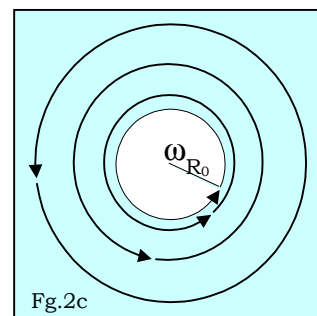
$$dC = \mathbf{rotu} \cdot d\mathbf{S}$$

e, di conseguenza, la circolazione di  $\mathbf{u}$  calcolata su L (**Teorema di Stokes**)

$$\oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{rotu} \cdot d\mathbf{S}$$

Il teorema di Stokes trasforma un integrale di linea in un integrale di superficie.

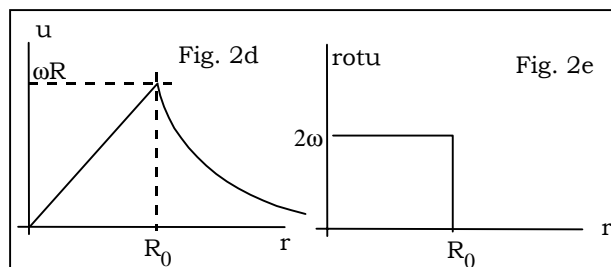
Il significato della operazione rotore si può intuire dall'esempio di fig. 2c) dove si immagina che un cilindro di raggio  $R_0$  ruoti in un fluido con velocità angolare  $\omega_0$ . Detto  $\mathbf{u}$  il campo delle velocità con cui ruota un punto del cilindro che si trova a distanza  $r$  dall'asse ( $u = \omega_0 r$ ),  $\mathbf{rotu}$  è un vettore diretto ovunque nel cilindro come l'asse z, di modulo  $\partial u_y/\partial x - \partial u_x/\partial y$  e che risulta costante essendo  $u_x = -\omega_0 r(y/r)$  ed  $u_y = \omega_0 r(x/r)$  per cui: (per  $r \leq R_0$ ),  $|\mathbf{rotu}| = 2\omega_0 = \text{costante}$ .



Il cilindro mette in rotazione, con velocità eguale alla sua velocità periferica, lo straterello di fluido che lo "bagna"; questo però, centrifugato dalla rotazione, si sposta verso l'esterno occupando circonferenze sempre piu' larghe.

In assenza di attrito interno, ogni straterello di fluido conserva il momento della quantita' di moto acquisito quando era a contatto col cilindro, cioè  $mR_0^2\omega_0 = mr^2\omega$ . Per  $r > R_0$  il fluido ruota con velocità angolare  $\omega(r) = R_0^2\omega_0/r^2$  per cui  $u(r) = R_0^2\omega_0/r$ . In conclusione, da  $u_x = -R^2\omega_y/(x^2+y^2)$  e  $u_y = R^2\omega_x/(x^2+y^2)$  si ottiene, per  $r > R_0$ ,  $\mathbf{rotu} = 0$ .

L'andamento del campo delle  $\mathbf{u}$  e del rotore di  $\mathbf{u}$ , cilindro incluso, è rappresentato in fig. 2 d ed e. Il campo delle  $\mathbf{u}$  è un campo a simmetria cilindrica, caratterizzato dalla relazione  $\mathbf{rotu} = 2\omega$  per  $0 \leq r \leq R_0$ . Si verifichi che, se sulla superficie che ha come contorno il cammino chiuso sul quale viene calcolata una qualunque circolazione di  $\mathbf{u}$ , si ha



in tutto o in parte  $\mathbf{rotu} \neq 0$ , per il teorema di Stokes anche la circolazione di  $\mathbf{u} \neq 0$ . Per questo lo spazio ove  $\mathbf{rotu} \neq 0$  si interpreta come luogo delle sorgenti di  $\mathbf{u}$ , e che  $\mathbf{rotu}$  ne esprime la forza. Nel fluido, ove  $\mathbf{rotu} = 0$ , il fluido ruota per inerzia intorno all'asse, ma non vi sono sorgenti del moto (potrebbero esservi se l'attrito interno del fluido non fosse nullo). Un campo a linee chiuse che varia come  $1/r$  è un campo a rotore nullo!

Ricordiamo ora che, per i campi magnetici prodotti da correnti stazionarie, abbiamo espresso un concetto analogo, quando abbiamo individuato le sorgenti di  $\mathbf{B}$  nelle correnti, idea espressa quantitativamente nel teorema di Ampère:  $\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$  dove  $I$  rappresenta la somma algebrica delle correnti concatenate con  $\ell$ . Introdotta la densità di corrente  $\mathbf{J}$  nella descrizione delle correnti, il teorema di Ampère

si riscrive:  $\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = (\text{Teor. di Stokes}) = \int_S \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  da cui  $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

Il rotore di  $\mathbf{B}$  risulta proporzionale alla densità delle sorgenti di  $\mathbf{B}$ .

In elettrodinamica abbiamo ricavato le seguenti due relazioni, valide istante per istante per i campi nel vuoto:

$$\oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad \oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right]$$

Applicando il teorema di Stokes ad ambedue si ottengono, dalla eguaglianza delle funzioni integrande, le due relazioni:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \qquad \text{e} \qquad \text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_0 \mathbf{J}$$

valide punto per punto e istante per istante. Assieme alle due divergenze:

$$\text{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \qquad \text{e} \qquad \text{div} \mathbf{B} = 0.$$

esse costituiscono le equazioni dei campi espresse in forma locale, quindi valide punto per punto e istante per istante nel vuoto, in presenza di sole cariche e correnti. Nei mezzi materiali  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  rappresentano i campi nel mezzo mentre  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  vanno sostituiti con  $\epsilon$  e  $\mu$ . Nel vuoto o nei mezzi materiali i campi sono definiti tramite la forza di Lorentz

$$d\mathbf{F} = \rho dv (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

Le quattro equazioni sono anche note come equazioni di Maxwell, che è stato il primo a scriverle in questa forma locale, oltre ad aggiungervi il termine di spostamento.

Una loro lettura può essere la seguente: noti il campo elettrico e/o magnetico e le loro derivate in un punto ed in un istante qualunque, le equazioni di Maxwell forniscono le densità di sorgenti del campo che si trovano in quel punto in quell'istante.

Per i campi elettrici prodotti da cariche in quiete, le sorgenti del campo (elettrostatico) sono descritte da campi scalari di densità di carica, localizzate nei punti in cui

$$\text{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \neq 0.$$

Per i campi elettrici prodotti in condizioni dinamiche, le sorgenti sono descritte da campi vettoriali solenoidali che ne esprimono la densità. Esse sono localizzate in punti in cui (Faraday-Neumann)

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$$

Per i campi magnetici la divergenza si assume sempre nulla, negando così l'esistenza di "cariche magnetiche" con ruolo di sorgenti analogo a quello delle cariche elettriche. I campi magnetici sono sempre solenoidali e le loro sorgenti sono a loro volta descritte da campi vettoriali solenoidali (Ampère-Maxwell) localizzati in punti in cui

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \neq 0.$$

### VII.3 – GRADIENTE. LAPLACIANO.

Dato un campo scalare  $S(x,y,z)$  il vettore di componenti  $\partial S/\partial x, \partial S/\partial y, \partial S/\partial z$  si dice gradiente del campo e si indica con **gradS**. Detto **dl** un vettore che nel punto di coordinate  $x,y,z$  indica una qualunque direzione, il prodotto scalare **gradS**·**dl** costituisce la derivata direzionale di  $S$  che indicheremo con  $\partial S/\partial l$ . Essa è massima quando **dl** è diretto come **gradS**. Quindi **gradS** indica la direzione in cui è massima la variazione di  $S$  per unità di lunghezza. Ad esempio, se con  $S$  indichiamo la pressione atmosferica, **gradS** è diretto lungo la verticale, verso il basso

E' facile dimostrare, in base alla eguaglianza delle derivate seconde miste di una funzione regolare, che:

$$\text{rotgradS} = 0.$$

Inoltre

$$\text{div gradS} = \partial^2 S/\partial x^2 + \partial^2 S/\partial y^2 + \partial^2 S/\partial z^2$$

L'operazione di somma delle derivate parziali seconde di un campo scalare è detta laplaciano scalare o, semplicemente, **laplaciano** di  $S$  e si indica con  $\nabla^2 S$ .

Sviluppando la teoria del potenziale del campo elettrostatico, nel cap. I abbiamo visto che un campo a circolazione identicamente nulla (quindi a rotore identicamente nullo) come il campo elettrostatico si può sempre considerare gradiente di una funzione  $V$ , il potenziale scalare di **E**, che nella fattispecie abbiamo definito tramite la **E=-gradV**. Dalla  $\text{divE}=\rho/\epsilon_0$  e dalla **E=-gradV** si ha dunque che il potenziale elettrostatico soddisfa punto per punto la relazione  $\nabla^2 V=\rho/\epsilon_0$  (equazione di Poisson) e, in particolare, nel vuoto, la  $\nabla^2 V=0$  (equazione di Laplace).

Il laplaciano si può anche definire per un campo vettoriale. Il laplaciano,  $\nabla^2 \mathbf{u}$ , di un campo vettoriale **u**, è un campo vettoriale di componenti :

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{u})_x &= \partial^2 u_x/\partial x^2 + \partial^2 u_x/\partial y^2 + \partial^2 u_x/\partial z^2 \\ (\nabla^2 \mathbf{u})_y &= \partial^2 u_y/\partial x^2 + \partial^2 u_y/\partial y^2 + \partial^2 u_y/\partial z^2 \\ (\nabla^2 \mathbf{u})_z &= \partial^2 u_z/\partial x^2 + \partial^2 u_z/\partial y^2 + \partial^2 u_z/\partial z^2 \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che, qualunque sia **A** purchè regolare, **rot(rotA) = grad(divA)-∇²A**. Svolgiamo la dimostrazione per la componente x di **rot (rot A)** per la quale dev'essere

$$(\text{rot (rot A)})_x - (\text{grad (divA)})_x + \nabla^2 A_x = 0.$$

Infatti, posto genericamente **u = rotA**,

per cui:  $u_z = (\text{rot A})_z = \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y$  ed  $u_y = (\text{rot A})_y = \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x$

$$\begin{aligned} \text{si ottiene } (\text{rot (rot A)})_x &= (\text{rot u})_x = \partial u_z/\partial y - \partial u_y/\partial z = \\ &= \partial^2 A_y/\partial y\partial x - \partial^2 A_x/\partial y^2 - \partial^2 A_x/\partial z^2 + \partial^2 A_z/\partial x\partial z \end{aligned}$$

D'altra parte:  $-\text{grad}(\text{divA})_x = -\partial^2 A_x/\partial x^2 - \partial^2 A_y/\partial y\partial x - \partial^2 A_z/\partial x\partial z$

mentre  $(\nabla^2 \mathbf{A})_x = \partial^2 A_x/\partial x^2 + \partial^2 A_x/\partial y^2 + \partial^2 A_x/\partial z^2$  per cui, sommando membro a membro, si ottiene zero, c.d.d.

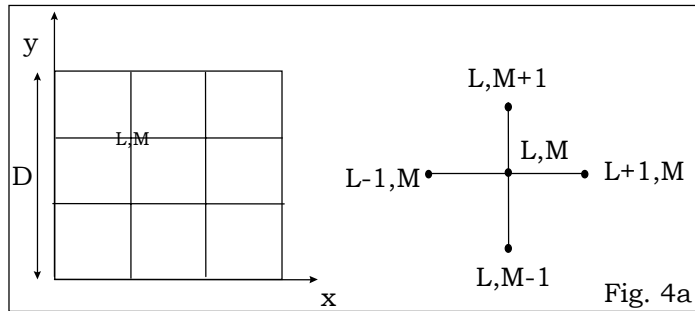
Analoghe relazioni, che per brevità diamo senza dimostrazione, sono le seguenti:

Divergenza del prodotto di uno scalare  $S$  per un vettore **V**:  $\text{div}(\mathbf{SV}) = S\text{divV} + \text{gradS}\cdot\mathbf{V}$

Rotore del prodotto di uno scalare  $S$  per un vettore **V**:  $\text{rot}(\mathbf{SV}) = S\text{rotV} + \text{gradS}\wedge\mathbf{V}$ .

VII.4 – SIGNIFICATO DELL'OPERAZIONE LAPLACIANO.

Il laplaciano, in quanto **divgrad**, rappresenta anch'esso, al pari di divergenza e gradiente, una proprietà intrinseca del campo, indipendente dalla descrizione dello



spazio adottata. Per semplicità dedurremo tale proprietà da considerazioni su un campo scalare S definito in uno spazio a due dimensioni, (facilmente estendibili ad uno spazio ad n dimensioni).

Consideriamo un quadrato di lato D (Fig. 4a). Dividiamo ciascun lato in N parti eguali, di

lunghezza  $h=D/N$ , e tracciamo N-1 linee perpendicolari ad essi in modo da individuare  $(N-1)^2$  incroci. Le coordinate di ciascuno di questi incroci saranno  $x=Lh$  ed  $y = Mh$ , con  $L,M = 1, 2, \dots, N-1$ .

Consideriamo ora una funzione  $S(x,y)$  definita in tutto il rettangolo assieme alle sue derivate. Indicato con  $S(L,M)$  il valore di S nel punto di coordinate  $x = Lh$  ed  $y = Mh$ , dallo sviluppo in serie di  $S(L,M)$  avremo, nei per i due incroci più vicini in direzione x:

$$\begin{aligned} S(L+1,M) &= S(L,M) + (\partial S/\partial x)_{LM} h + (\partial^2 S/\partial x^2)_{LM} h^2/2! + \dots \\ S(L-1,M) &= S(L,M) - (\partial S/\partial x)_{LM} h + (\partial^2 S/\partial x^2)_{LM} h^2/2! - \dots \end{aligned}$$

da cui: 
$$S(L+1,M) + S(L-1,M) = 2S(L,M) + (\partial^2 S/\partial x^2)_{LM} h^2 + ..$$

Analogamente, per gli incroci più vicini in direzione y si ottiene:

$$S(L,M+1) + S(L,M-1) = 2S(L,M) + (\partial^2 S/\partial y^2)_{LM} h^2 + ..$$

Sommando membro a membro, si ottiene la seguente relazione, valida per ogni incrocio interno al quadrato:

$$\begin{aligned} 4[(S(L+1,M) + S(L-1,M) + S(L,M+1) + S(L,M-1))/4 - S(L,M)]/h^2 &= 4(S_{\text{medio}} - S(L,M)) = \\ &= h^2 (\partial^2 S/\partial x^2 + \partial^2 S/\partial y^2)_{LM} + h^4(..) + h^6(..) .. + .. \approx h^2 \nabla^2 S(L,M) \end{aligned}$$

se la rete di incroci è abbastanza fitta, per cui i termini in  $h^4, h^6$  ecc... si possono trascurare nella somma. Con  $S_{\text{medio}}$  si intende la media dei valori assunti da S in punti vicini al punto di coordinate L,M. Il laplaciano di una funzione calcolato in un punto è **proporzionale** alla differenza tra il valore della funzione in quel punto e la media aritmetica dei valori che la funzione assume nei punti vicini. In particolare, se all'interno di un volume v dev'essere  $\nabla^2 S=0$  ovunque, allora dev'essere  $S(L,M)=S_{\text{medio}}$  in tutto v. Questa situazione caratterizza i potenziali elettrostatici nel vuoto, che al par. precedente abbiamo visto soddisfare la equazione di Laplace .

Di qui segue un ben noto metodo numerico (**metodo di rilassamento**) di calcolo dei potenziali elettrostatici in un volume vuoto, noti i potenziali sul "contorno" di detto volume, ad esempio sui quattro lati del nostro quadrato. Si parte con una ragionevole approssimazione dei valori di V all'interno del quadrato, poi si applica più volte la formula che impone ai potenziali nei vari incroci interni al quadrato di essere eguali ( $\nabla^2 V =0$ ) alla media aritmetica dei valori circostanti, cambiandoli a poco a poco finchè tale proprietà vi si trova verificata entro una tolleranza definita a priori.

VII.5 – EQUAZIONI DI LAPLACE E DI POISSON. CAMPI IN CONDIZIONI STAZIONARIE.

L'equazione:  $\nabla^2 S = \partial^2 S / \partial x^2 + \partial^2 S / \partial y^2 + \partial^2 S / \partial z^2 = 0$

è una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, nota come **equazione di Laplace**. Ricordiamo ancora una volta che i potenziali elettrostatici ricavati, ad esempio, mediante il metodo delle immagini rappresentano soluzioni di questa equazione. I metodi numerici, accennati al paragrafo precedente, costituiscono altri metodi di soluzione della equazione di Laplace. Altri ancora ne sono stati sviluppati.

Dimostriamo ora il **teorema di unicità** delle soluzioni della equazione di Laplace, rifacendoci ad un caso specifico, comunque abbastanza generale. Consideriamo un certo numero di conduttori separati l'uno dall'altro, a diverso potenziale che e siano  $V_1(x,y,z)$  e  $V_2(x,y,z)$  due diverse soluzioni della equazione di Laplace imponendo le stesse condizioni al contorno nei due casi, in particolare gli stessi valori del potenziale  $V$  e gli stessi valori di  $(\mathbf{grad}V)_\perp$  sulle loro superfici.

Sia ora  $V_D = V_1 - V_2$ ; anche  $V_D$  è una soluzione della equazione di Laplace, caratterizzata da  $V_D = 0$  sulla superficie dei conduttori. Sia  $S_0$  questa superficie e  $v_0$  il volume compreso tra i conduttori, nel quale si estende il campo. Per il lemma di Green si ha:

$$\int_{v_0} \text{div}(V_D \mathbf{grad} V_D) dv = \int_{S_0} V_D \mathbf{grad} V_D \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Da  $\text{div} S \mathbf{u} = S \text{div} \mathbf{u} + \mathbf{grad} S \cdot \mathbf{u}$  si ha  $\int_{v_0} \text{div}(V_D \mathbf{grad} V_D) dv = \int_{v_0} (\mathbf{grad} V_D)^2 dv + \int_{v_0} V_D \nabla^2 V_D dv$

Di conseguenza, essendo il primo membro eguale a zero, dev'essere anche  $\mathbf{grad} V_D = 0$  in tutto  $v_0$ . Ne segue  $V_D = \text{cost}$  in tutto  $v_0$ . Le due soluzioni  $V_1$  e  $V_2$  possono differire solo di una costante. c.d.d.

In uno spazio in cui sono presenti cariche distribuite con densità  $\rho(x,y,z)$ , i potenziali sono definiti dentro e fuori le distribuzioni di carica e sono soluzioni della equazione di Poisson (che si ricava immediatamente dalla  $\text{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$  e dalla  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$ ):

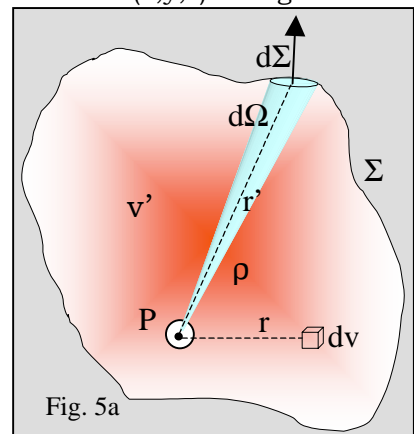
$$\nabla^2 V = \partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = -\rho / \epsilon_0$$

Una relazione importante (dimostrata in appendice) per la soluzione della equazione di Poisson si può così riassumere: se una funzione  $\Phi(x,y,z)$  è regolare nel volume  $v$  racchiuso entro una superficie chiusa  $\Sigma$ , che può essere sia al finito che all'infinito, all'interno di  $\Sigma$  vale punto per punto la seguente identità:

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla^2 \Phi}{r} dv - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \Phi \mathbf{grad} \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{\Sigma} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\mathbf{grad} \Phi}{r} \cdot d\mathbf{\Sigma}$$

dove  $v'$  rappresenta  $v$  meno un volume infinitesimo racchiudente  $P$ . Pertanto se  $\Phi$  rappresenta un potenziale elettrostatico che, sappiamo, soddisfa la  $\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$ , essa diventa:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho}{r} dv - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} V \mathbf{grad} \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{\Sigma} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\mathbf{grad} V}{r} \cdot d\mathbf{\Sigma}$$



Nella relazione ottenuta per V:

-Il primo termine rappresenta il contributo al potenziale in P dovuto alle cariche contenute entro  $\Sigma$ , assimilate a tante cariche puntiformi  $dq=\rho dv$ .

-Il secondo richiede la conoscenza del potenziale su  $\Sigma$  dovuto alle cariche interne ed esterne a  $\Sigma$ , ed è proporzionale al potenziale in  $d\Sigma$  moltiplicato per l'angolo solido  $d\Omega$  sotto il quale ciascuna  $d\Sigma$  è vista da P ( $d\Omega=-\text{grad}(1/r)\cdot d\Sigma$ )

- Il terzo richiede la conoscenza del gradiente di V, quindi di  $\mathbf{E}$ , su  $\Sigma$ .

L'applicazione di questa formula restituisce risultati già noti in alcuni casi:

- Per  $\Sigma$  all'infinito, si ottiene per V l'espressione già nota:  $V(P) = (1/4\pi\epsilon_0)\int_V(\rho/r)dv$ . Occorre però assumere che per  $r\rightarrow\infty$  il potenziale tenda a zero almeno come  $1/r$ , cioè che le cariche risiedano solo al finito (ed i campi almeno come  $1/r^2$ ).

- Per  $\Sigma$  al finito, abbiamo il caso di  $V = V_C = \text{costante}$  su tutta  $\Sigma$  ed  $\mathbf{E} = 0$  e  $\rho=0$  al suo interno, che corrisponde alla situazione di un conduttore di superficie  $\Sigma$  in equilibrio elettrostatico. In questo caso detto P un punto interno al conduttore,

$$V(P) = (1/4\pi)V_C\cdot 4\pi = V_C.$$

Tutto il conduttore è allo stesso potenziale della superficie.

Appendice.

Siano  $\Phi(x,y,z)$  e  $\Psi(x,y,z)$  due funzioni scalari, regolari in  $v$ , e  $\mathbf{grad}\Phi$  e  $\mathbf{grad}\Psi$  i rispettivi gradienti. Dal lemma di Green abbiamo:

$$\int_V \text{div}(\Psi\mathbf{grad}\Phi) dv = \int_S \Psi\mathbf{grad}\Phi \cdot d\mathbf{S} \quad \text{e} \quad \int_V \text{div}(\Phi\mathbf{grad}\Psi) dv = \int_S \Phi\mathbf{grad}\Psi \cdot d\mathbf{S}$$

Da queste, sottraendo membro a membro e ricordando che  $\text{div}\mathbf{grad} = \nabla^2$  si ottiene il **teorema di Green**:

$$\int_S (\Phi\mathbf{grad}\Psi - \Psi\mathbf{grad}\Phi) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi) dv$$

Poniamo  $\Psi=1/r$ , che sappiamo essere il potenziale di una carica puntiforme, quindi soluzione della  $\nabla^2\Psi=0$ .  $\Psi=1/r$  è definita in tutto lo spazio meno che nel punto P ove si trova la carica. Possiamo pertanto sostituire  $\Psi=1/r$  nella formula di Green purchè  $v$  sia tutto il volume contenuto entro S meno un volumetto  $v'$  contenente P delimitato da una superficie sferica  $S'$  di raggio R piccolo quanto si vuole ma non nullo.

Le integrazioni saranno pertanto su S ed  $S'$  e su  $v - v'$ . Si ottiene, con  $dS$  e  $dS'$  orientati verso l'esterno di  $v-v'$ :

$$\int_S \left( \Phi \mathbf{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \mathbf{grad} \Phi \right) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \left( \Phi \mathbf{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \mathbf{grad} \Phi \right) \cdot d\mathbf{S}' = \int_{v-v'} -\frac{\nabla^2\Phi}{r} dv$$

L'integrale esteso ad  $S'$  è eguale a  $-4\pi\Phi_{\text{medio}}$  calcolato su  $S'$ , e si può assumere coincidente col valore di  $\Phi$  nel punto P. Infatti  $\mathbf{grad}(1/r)\cdot d\mathbf{S}'$ , integrato su  $S'$ , coincide coll'angolo solido sotto il quale  $S'$  è vista da P (la normale ad  $S'$  è orientata verso l'interno di  $S'$ , l'esterno di  $v-v'$ ). Inoltre  $dS'/r$  tende a zero per  $r$  tendente a zero in quanto la superficie varia come  $r^2$ . Si ottiene, a conti fatti:

$$\int_S \left( \Phi \mathbf{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \mathbf{grad} \Phi \right) \cdot d\mathbf{S} + 4\pi\Phi(P) = \int_{v-v'} -\frac{\nabla^2\Phi}{r} dv$$

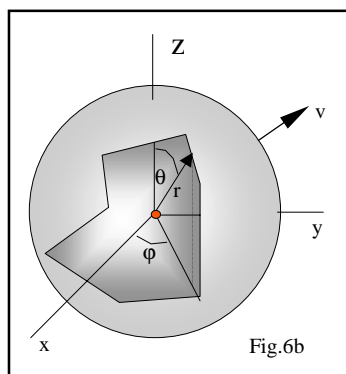
c.d.d,



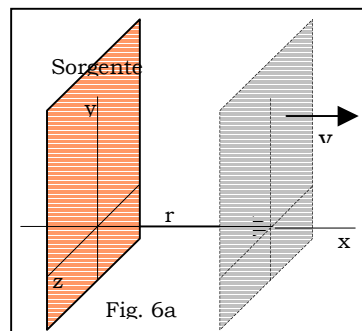
VII.6 – ONDE IN PROPAGAZIONE LIBERA. CINEMATICA.

Il concetto di onda è legato, nella comune esperienza, alla propagazione di una perturbazione in un mezzo continuo. La descrizione analitica di questo fenomeno è affidata ad una funzione  $E(x,y,z,t)$  che punto per punto e istante per istante descrive una **elongazione**, cioè lo spostamento di una grandezza rispetto alla condizione in cui essa si troverebbe in assenza dell'onda.

Noi non considereremo tutti i possibili tipi di onde. Anzi, ci limiteremo ad un sottoinsieme che gode di particolari simmetrie, costituito dalle onde piane, dalle onde sferiche e dalle onde cilindriche in propagazione in un mezzo illimitato, omogeneo ed isotropo.

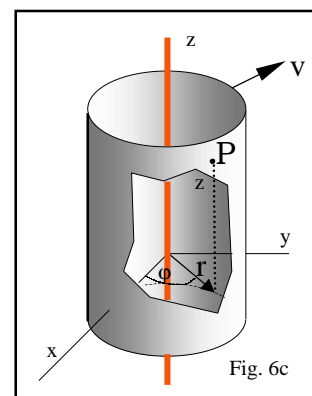


Per definizione nell'**onda piana**, in un qualunque istante, l'elongazione deve essere la stessa su ogni piano parallelo ad un particolare piano, dove immaginiamo sia localizzata la sorgente dell'onda. Ad esempio, in fig. 6a la sorgente coincide con il piano yz mentre sul piano distante r dalla sorgente l'elongazione è  $(E(x,y,z,t) = E(x,t))$  indipendente da y e da z).



Analogamente nell'**onda sferica**, in qualunque istante, l'elongazione deve essere la stessa su una qualunque superficie sferica (Fig. 6b) centrata su un punto, la sorgente dell'onda. In presenza di questa particolare simmetria conviene esprimere le coordinate spaziali del punto in coordinate sferiche  $r,\theta,\phi$ . Dato t, per l'onda sferica si ha  $E(r,\theta,\phi,t) = E(r,t)$ , indipendente da  $\theta,\phi$ .

Nell'**onda cilindrica**, infine, l'elongazione sarà la stessa su qualunque superficie cilindrica (Fig. 6c) distante r da un asse, la sorgente dell'onda. In questo caso conviene usare coordinate cilindriche  $r,z,\phi$ . Dato t, per l'onda cilindrica si ha  $E(r,z,\phi,t) = E(r,t)$  indipendente da z e  $\phi$ .



Il sottoinsieme di onde che andremo a trattare dovrà inoltre soddisfare anche ad un'altra condizione, l'equazione di D'Alembert:

$$\nabla^2 E(P, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(P, t)}{\partial t^2}$$

dove con P abbiamo indicato le coordinate spaziali di un qualunque punto a prescindere dalla rappresentazione dello spazio adottata (coordinate cartesiane, polari o cilindriche).

Nel caso delle onde piane, rappresentato in fig. 6a, l'equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2}$$

Dimostriamo che la sua soluzione più generale è la funzione  $E(P, t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ .

Per dimostrarlo si ponga  $\xi = x - kt$  ed  $\eta = x + kt$  e dimostriamo, per sostituzione diretta, che  $E(x,t)$  deve essere della forma  $E(x,t) = f(\xi) + g(\eta)$ . Infatti, con due successive derivazioni si ottiene:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2 \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \right)$$

Se ora sostituiamo nella nostra equazione differenziale le espressioni ottenute, vediamo che essa può essere soddisfatta solo se:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{e} \quad k^2 = v^2$$

che implica che  $E(x,t)$  debba essere della forma  $f(\xi) + g(\eta) = f(x - vt) + g(x + vt)$ .

In conclusione le soluzioni indipendenti sono due, corrispondenti ai segni - e + che compaiono nell'argomento di  $E$ . Esse caratterizzano un'onda che viaggia con velocità  $v$  nella direzione delle  $x$  positive (-) o negative (+).

-Se l'argomento di  $E$  è del tipo  $x-vt$ , esso rappresenta un numero che se in un certo punto  $P$ , all'istante  $t$ , assume il valore  $\alpha$ , assume lo stesso valore  $\alpha$  in un istante seguente  $t'=t+\Delta t$  in un punto  $P'$  distante da  $P$  di  $\Delta x = v\Delta t$  (**soluzione progressiva**).

-Se invece l'argomento di  $E$  è del tipo  $t + x/v$ , allora esso assume lo stesso valore in un punto  $P'$  distante da  $P$  di  $\Delta x = -v\Delta t$  (**soluzione retrograda**).

A questo egual valore dell'argomento, nei due casi, corrisponde un eguale valore della elongazione  $E$ ; **nell'onda piana che soddisfa l'equazione di D'Alembert il profilo dell'onda si sposta con velocità  $v$  e non viene modificato durante la propagazione.**

L'argomento di  $E$  si chiama **fase** dell'onda. La propagazione di un'onda è quindi descrivibile tramite la propagazione delle sue superfici di egual fase. In genere se ne utilizzano solo alcune di particolare significato, come quelle sulle quali l'onda ha un massimo, o è nulla. Le superfici di egual fase si chiamano **fronti d'onda**. Il piano che in fig. 6a si propaga nella direzione delle  $x > 0$  rappresenta un fronte d'onda in un'onda piana progressiva.

Nel caso delle onde sferiche, conviene esprimere il laplaciano in coordinate sferiche

come segue :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

che diventa :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

una volta eliminati tutti i termini che moltiplicano derivate di  $E$  rispetto a  $\theta$  e a  $\phi$ .

Nel caso delle onde cilindriche, conviene esprimere il laplaciano in coordinate cilindriche:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

che diventa :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

una volta eliminati i termini contenenti derivate rispetto a  $z$  e  $\phi$ .

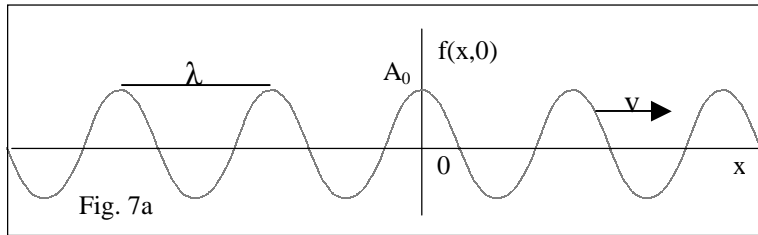
Per quanto riguarda le soluzioni, per ambedue le equazioni esse avranno ancora argomento  $r \pm vt$ , quindi esprimeranno ancora onde progressive e retrograde, ma la loro espressione sarà diversa da quella per le onde piane. Su questo torneremo più avanti.

VII. 7 - ONDE SINUSOIDALI PIANE, SFERICHE E CILINDRICHE.

Un'onda piana sinusoidale è descritta da una equazione del tipo  $f(x,t) = A_0 \cos(k(x-vt) + \phi_0)$  se l'onda è progressiva,  $f(x,t) = A_0 \cos(k(x+vt) + \phi_0)$  se l'onda è retrograda. La **fase** dell'onda, in un dato punto ( $x$ ) ed in un dato istante ( $t$ ) è data dall'argomento del coseno. Il valore di  $\phi_0$  rappresenta la "fase iniziale" dell'onda, cioè la fase per  $x=t=0$ .

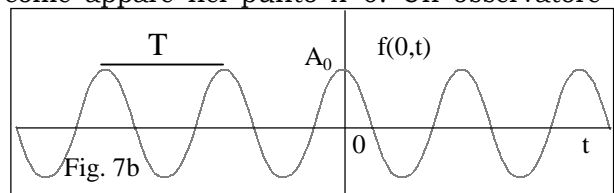
L'onda si potrebbe rappresentare, graficamente, mediante un diagramma in due variabili,  $x$  e  $t$ . Si preferisce però descriverla mediante un **diagramma spaziale**, in cui si descrive  $f$  come  $f(x)$  per un dato  $t$ , oppure mediante un **diagramma temporale**, in cui si descrive  $f$  come  $f(t)$  per un dato  $x$ .

Il diagramma spaziale di  $f(x,t)$ , posto  $t=0$ , ed assunto per semplicità  $\phi_0=0$ , è una sinusoide di **ampiezza**  $A_0$  come rappresentato in fig. 7a). La costante  $k$  si definisce **pulsazione spaziale dell'onda**. Il periodo spaziale, indicato con  $\lambda$ , ne definisce la **lunghezza d'onda**. Evidentemente si ha  $k=2\pi/\lambda$ . Se



l'onda è progressiva ( $f(x,t)=A_0 \cos(k(x-vt))$ ) la sinusoide che ne rappresenta il diagramma spaziale si deve pensare spostarsi, in istanti successivi, verso sinistra, quindi nella direzione delle  $x$  positive, con velocità  $v$ . In direzione inversa se l'onda è retrograda.

Il diagramma temporale dell'onda è anch'esso una sinusoide di ampiezza  $A_0$  rappresentato in fig. 7b) per  $\phi_0=0$  e per come appare nel punto  $x=0$ . Un osservatore posto in  $x=0$  osserva pertanto una oscillazione armonica di ampiezza  $A_0$ , di **pulsazione temporale**  $\omega_0=kv$ , quindi **periodo temporale**  $T=2\pi/\omega_0$ .

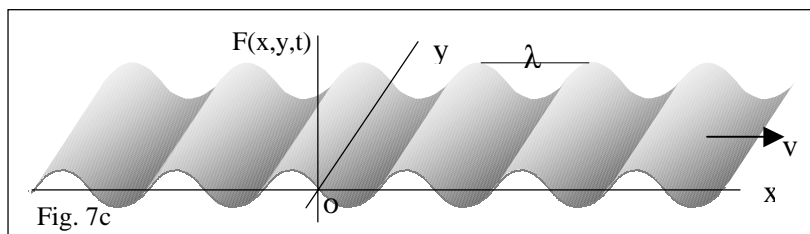


Con questa simbologia, mutuata dal linguaggio delle oscillazioni armoniche, l'equazione di un'onda piana sinusoidale assume l'espressione:  $f(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega_0 t + \phi_0)$

Spesso la si trova anche scritta nella forma ( $k = \omega_0/v$ ):  $f(x,t) = A_0 \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{x}{v}\right) + \phi_0\right)$

Il valore che  $f$  assume, per un dato  $x$  e  $t$ , è detto **elongazione** mentre  $A_0$ , l'elongazione massima, è detta **ampiezza** dell'onda. L'elongazione risulta periodicamente la stessa per fasi che differiscono per un multiplo intero di  $2\pi$ .

Ad esempio in fig. 4c) è rappresentato il diagramma spaziale di un'onda sinusoidale piana che si propaga nel piano  $x,y$  con velocità  $v$ , di equazione:  $F(x,y,t) = A_0 \cos(kx - \omega t + \pi/2)$



ove si è assunto  $f=0$  per  $x = t = 0$  e derivata negativa.

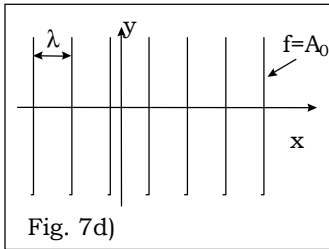


Fig. 7d)

I fronti d'onda sono rette parallele all'asse y; i fronti d'onda cui corrisponde la stessa fase a meno di multipli di  $2\pi$  sono distanziati di  $\Delta x = 2\pi/k = \lambda$  e possono essere utilizzati per una più semplice rappresentazione del diagramma spaziale dell'onda (Fig. 7d).

Un'onda piana sinusoidale che si propaga in una direzione qualunque può essere rappresentata dai medesimi fronti d'onda, come in fig. 7e). Detto  $\mathbf{k}$  un vettore di modulo  $k=2\pi/\lambda$  diretto secondo la direzione di propagazione dell'onda, l'equazione dell'onda si può scrivere:

$$f(x, y, t) = A_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\pi}{2})$$

E' evidente che il termine di fase ( $\pi/2$ ) si può sempre annullare assumendo un punto opportuno come origine degli assi.

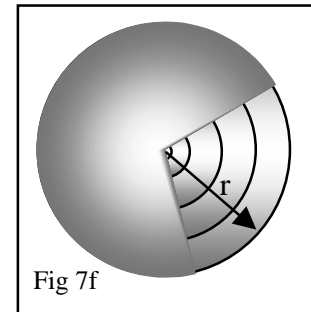
Infine, una rappresentazione alternativa della equazione dell'onda sinusoidale si ottiene come parte reale dell'esponenziale complesso:

$$f(x, y, t) = A_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)}$$

E' facile verificare, per sostituzione nella equazione delle onde in coordinate polari, che una soluzione della equazione delle onde sferiche, di tipo sinusoidale, dovrà avere la forma:

$$S(r, \theta) = \frac{A}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$$

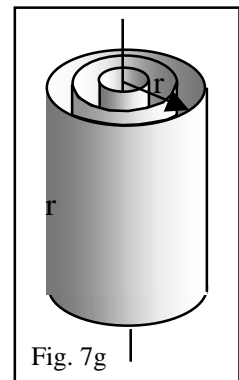
con A ed  $\omega$  arbitrari e v la stessa che si avrebbe per onde piane nello stesso mezzo. In essa si suppone, chiaramente, fase zero per t ed r =0. In Fig. 7f sono rappresentati alcuni fronti d'onda appartenenti ad un'onda sferica sinusoidale in un istante qualunque della sua propagazione. Ad essi corrisponde, per convenzione, la stessa fase a meno di multipli interi di  $2\pi$ .



Analogamente, per sostituzione, si dimostra che le soluzioni sinusoidali della equazione delle onde cilindriche hanno la forma (approssimata)

$$S(r, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$$

Di fatto, essa è valida per valori di r abbastanza grandi da poter trascurare termini in  $\lambda^2/r^2$  rispetto a termini in  $\lambda/r$ . In Fig. 7g sono rappresentati alcuni fronti d'onda di un'onda sinusoidale cilindrica in un istante qualunque della loro propagazione. Anche ad essi corrisponde la stessa fase a meno di multipli interi di  $2\pi$ .



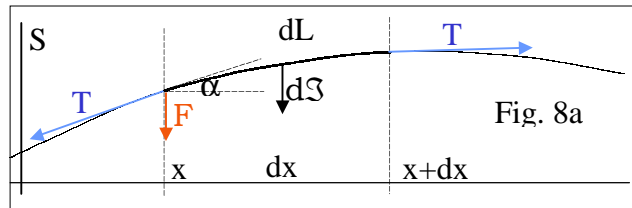
VII. 8. ONDE IN PROPAGAZIONE LIBERA – DINAMICA.

L'equazione delle onde si deve ottenere a partire dalle leggi che regolano la dinamica della propagazione della perturbazione nel mezzo in cui si propagano. Come esempio vogliamo vedere come dalle leggi di Newton segua che un impulso applicato trasversalmente ad una corda tesa con tensione  $T$  si propaghi lungo la corda soddisfacendo punto per punto e istante per istante alla equazione di D'Alembert. Di fatto, questo problema fu risolto per la prima volta proprio da D'Alembert, a metà '700, e per questo l'equazione delle onde piane viene anche detta "**delle corde vibranti**". I dati del problema sono le proprietà di inerzia (massa per unità di lunghezza  $\rho$  della corda) ed elastiche (la tensione  $T$  con cui è tesa la corda).

Sia allora  $dL$  un elemento della corda spostato di  $S$  dalla sua posizione di equilibrio coincidente coll'asse  $x$ .

Supponiamo che gli spostamenti  $S$  siano molto limitati, per cui si può assumere  $\sin\alpha = \tan\alpha = \partial S/\partial x$  (Fig. 8a)

Sia  $\sigma_x$  la sezione del filo che corrisponde alla coordinata  $x$ . Definiamo  $F = -T\partial S/\partial x$  la componente verticale della forza con cui il filo che si trova a sinistra di  $\sigma_x$  agisce sul filo che si trova a destra.



Quando  $dL$  si trova spostato dalla posizione di equilibrio, su di esso agisce la forza:

$$d\mathfrak{S} = F(x) - F(x + dx) = -T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_x + T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x+dx} = T \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} dx = \rho dx \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

Troviamo pertanto che, in un qualunque momento della sua propagazione, la funzione  $S(x,t)$ , il profilo viaggiante della corda, deve soddisfare l'equazione di D'Alembert

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

per cui deve spostarsi con velocità  $v = \sqrt{T/\rho}$ . Questo risultato si può facilmente verificare.

Dimostriamo ora due proprietà delle soluzioni della equazione di D'Alembert.

1) Dimostriamo che, per una onda **progressiva**  $S(x-vt)$ , vale la relazione:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial t} \quad \left( = +\frac{1}{v} \frac{\partial S}{\partial t} \text{ per un'onda retrograda} \right)$$

Infatti, posto  $\xi = x - vt$ , si ha  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \xi}$  e  $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial S}{\partial \xi}$  c.d.d.

2) Dimostriamo che la forza  $F$  che istante per istante agisce da sinistra a destra attraverso la sezione  $\sigma_x$  è proporzionale alla velocità  $u$  con cui la sezione stessa si sposta trasversalmente alla corda. Infatti, la forza agente su  $dL$  è  $d\mathfrak{S} = -(dF/dx)dx$ , quindi avremo

$$d\mathfrak{S} = -\frac{\partial F}{\partial x} dx = \rho dx \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

Se l'onda è progressiva dev'essere  $\partial S/\partial x = -(1/v)\partial S/\partial t$ . Pertanto:

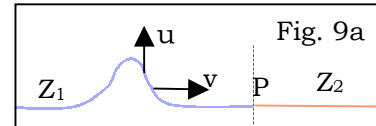
da  $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -v \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$  si ottiene  $\frac{\partial F}{\partial x} = \rho v \frac{\partial u}{\partial x}$  che presuppone  $F = \rho v u$  c.d.d.

Questo risultato è del tutto generale e si esprime come  $F = Zu$ . La costante  $Z$  è detta **impedenza caratteristica del mezzo**. Nel caso delle corde vibranti  $Z = \sqrt{Tp}$ .

## VII.9 – RIFLESSIONE E TRASMISSIONE DI ONDE MECCANICHE.

Il prodotto  $Fu=Zu^2$  rappresenta la potenza che viene trasportata da quest'ultima con velocità  $v$  per tutta la lunghezza del mezzo. Se l'onda è progressiva, la potenza viene trasmessa verso sinistra, se è retrograda verso destra.

Immaginiamo ora che i mezzi siano due, di impedenza diversa  $Z_1$  e  $Z_2$  e che un'onda piana sia diretta dall'uno all'altro. Istante per istante, attraverso il punto P di discontinuità in  $Z$  la forza  $F$  con cui il mezzo 1 agisce sul mezzo 2 è la stessa e, dato che la potenza portata dall'onda è  $W=Fu$ , anche  $u$  deve essere la stessa dalle due parti di P (**Continuità di F e di u**).



La continuità di  $F$  e di  $u$  viene sfruttata per analizzare quanto avviene sull'onda al passaggio da un mezzo ad un altro, di impedenza diversa. Di fatto, dalle due parti di P la continuità di  $F$  e di  $u$  non può essere soddisfatta da una sola onda (l'onda incidente su P) se  $Z_1 \neq Z_2$  in quanto per una stessa  $u$  la stessa  $F$  è data dal prodotto  $Z_1u$  da una parte di P, dall'altra da  $Z_2u$ . Bisogna introdurre **un'onda riflessa**, che sovrapponendosi **all'onda incidente** permetta di soddisfare ambedue le condizioni di continuità.

Dette  $u_{inc}$  ed  $u_{rifl}$  le velocità impresses al mezzo dalle due onde nell'intorno di P, se indichiamo la forza agente dal mezzo 1 al mezzo 2 come  $Z_2u_{inc} + Z_2u_{rifl}$ , quella agente sul mezzo 1 sarà  $Z_1u_{inc} - Z_1u_{rifl}$ .

$$\begin{aligned} \text{Avremo dunque:} \quad & (Z_2u_{inc} + Z_2u_{rifl}) = -(-Z_1u_{inc} + Z_1u_{rifl}) \quad (\text{continuità di } F) \\ & u_{inc}^{(1)} = u_{inc}^{(2)} \quad \text{e} \quad u_{rifl}^{(1)} = u_{rifl}^{(2)} \quad (\text{Continuità di } u). \end{aligned}$$

Dalla equazione sulla continuità di  $F$  si ricava il rapporto  $r$  tra  $u_{rifl}$  ed  $u_{inc}$ , il **coefficiente di riflessione**:

$$u_{rifl} = ru_{inc} \quad \text{con} \quad r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Anche per gli spostamenti  $S$  (le ampiezze) vale istante per istante la  $S_{rifl} = rS_{inc}$ .

Il coefficiente di riflessione inverte evidentemente il segno se l'onda viene dal mezzo 2. Indicati cogli indici  $_{12}$  e  $_{21}$  i coefficienti di riflessione per onde che vanno dal mezzo 1 al mezzo 2 e viceversa si ha  $r_{12} = -r_{21}$ .

Per  $Z_2 \gg Z_1$ , in P si ha,  $r_{12} = -1$  ed  $S_{rifl} = -S_{inc}$ . E' il caso di un impulso che si propaga lungo una corda coll'estremo fissato ad un muro, che si riflette rovesciato. Per  $Z_2 \ll Z_1$  (estremo libero) si ha  $r = +1$ ; l'onda si riflette e non si rovescia.

Va osservato che la espressione del coefficiente di riflessione ottenuta è applicabile alla ampiezza ed alla velocità degli spostamenti dell'onda riflessa, ma non alle forze che la generano agendo sul mezzo. Per queste infatti vale la  $-dF = m\partial u/\partial t$ , per cui il coefficiente di riflessione risulta di segno opposto a quello che si ricava per  $u$ . In conclusione:

$$r_{12}^{(s,u)} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad r_{12}^{(F)} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Analizziamo ora l'onda **trasmessa**.

Il rapporto tra l'ampiezza dell'onda trasmessa e l'ampiezza dell'onda incidente si indica con  $t$  ed è detto **coefficiente di trasmissione**. Per determinarlo osserviamo che la potenza dell'onda incidente meno la potenza dell'onda riflessa deve eguagliare la potenza dell'onda trasmessa.

Per un'onda che va dal mezzo 1 al mezzo 2 posto, per analogia con  $r_{12}$ ,  $u_{tras.} = t_{12}u_{inc}$  e posto inoltre  $P=Zu^2$  si ricava:

$$Z_1 u_{inc}^2 - Z_1 r_{12}^2 u_{inc}^2 = Z_2 t_{12}^2 u_{inc}^2$$

mentre, per un'onda che va da 2 a 1 si ha :

$$Z_2 u_{inc}^2 - Z_2 r_{21}^2 u_{inc}^2 = Z_1 t_{21}^2 u_{inc}^2$$

Si ottiene così :

$$t_{12} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \sqrt{1 - r_{12}^2}, \quad t_{21} = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \sqrt{1 - r_{21}^2}$$

$$\text{quindi } t_{12} t_{21} = 1 - r_{12}^2$$

Per  $r = \pm 1$  ( $Z_2 \gg Z_1$  o  $Z_2 \ll Z_1$ ) si ha evidentemente  $t=0$ ; non si ha onda trasmessa.

Per  $r$  molto piccolo, si può assumere  $t_{12} = t_{21} = 1$

L'**intensità** delle onde ( $P=Zu^2$ ) trasmessa e riflessa è proporzionale a  $t^2$  ed  $r^2$ , rispettivamente, e la loro somma eguaglia l'intensità dell'onda incidente ( $r^2+t^2=1$ ).

Osserviamo infine che se si vuole che un'onda che si propaga in un mezzo non si rifletta al passaggio in un secondo mezzo, diverso, è sufficiente che le impedenze intrinseche dei due mezzi siano eguali numericamente ("matching di impedenze").

VII.10 - ONDE ELETTROMAGNETICHE NEL VUOTO. ONDE PIANE.

In elettromagnetismo le equazioni di Maxwell caratterizzano la dinamica dei campi elettromagnetici. e di fatto da queste segue immediatamente che i campi elettrici e magnetici soddisfano l'equazione di D'Alembert.

Nel vuoto ad esempio, lontano da cariche e correnti, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t.$$

Se applichiamo alla terza la relazione:  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$ . otteniamo:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\partial \operatorname{rot} \mathbf{B} / \partial t = -\epsilon_0 \mu_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 \quad \text{quindi: } \nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2.$$

Analogamente, dalla quarta equazione di Maxwell si ottiene:  $\nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2$ .

- Nel vuoto, la **velocità di propagazione** delle onde e.m. è  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 300.000 \text{ Km/sec}$ .

- Dimostriamo che, nel caso in cui  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  si propagano per **onde piane**,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  non hanno componente  $x$  che varia nello spazio e/o nel tempo, quindi le **onde** sono **trasversali**.

Infatti, per onde piane, la  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  si traduce nella  $\partial E_x / \partial x = 0$ , che implica che  $E_x$  è costante al variare di  $x$ . Lo stesso vale per  $B_x$ .

Ma dev'essere anche  $E_x = \text{cost.}$  al variare di  $t$  e lo stesso deve valere per  $B_x$ .

Infatti le equazioni  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  e  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ . si traducono nelle tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{E})_x &= \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z = -\partial B_x / \partial t, & (\operatorname{rot} \mathbf{B})_x &= \partial B_z / \partial y - \partial B_y / \partial z = \epsilon_0 \mu_0 \partial E_x / \partial t, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{E})_y &= \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x = -\partial B_y / \partial t, & (\operatorname{rot} \mathbf{B})_y &= \partial B_x / \partial z - \partial B_z / \partial x = \epsilon_0 \mu_0 \partial E_y / \partial t, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{E})_z &= \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y = -\partial B_z / \partial t. & (\operatorname{rot} \mathbf{B})_z &= \partial B_y / \partial x - \partial B_x / \partial y = \epsilon_0 \mu_0 \partial E_z / \partial t. \end{aligned}$$

e dalla espressione di  $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_x$  si ricava  $\partial B_x / \partial t = 0$  perché nell'onda piana  $\mathbf{E}$  non varia per spostamenti in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione, e quindi  $\partial E_z / \partial y = \partial E_y / \partial z = 0$ . Dunque  $B_x$  non dipende da  $t$ . Lo stesso vale per  $E_x$ , come si ricava dalla espressione di  $(\operatorname{rot} \mathbf{B})_x$ . In quanto segue assumeremo  $E_x = B_x = 0$ .

- L'orientamento relativo dei vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , e le relative fasi, si ottengono assumendo per le onde elettromagnetiche una espressione sinusoidale, del tipo:

$$\begin{aligned} E_x(x,t) &= 0 & E_y(x,t) &= E_{0y} \cos(\omega t - kx + \phi) & E_z(x,t) &= E_{0z} \cos(\omega t - kx + \phi) \\ B_x(x,t) &= 0 & B_y(x,t) &= B_{0y} \cos(\omega t - kx + \psi) & B_z(x,t) &= B_{0z} \cos(\omega t - kx + \psi) \end{aligned}$$

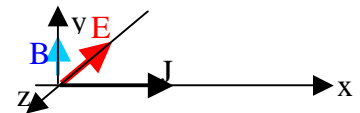
Queste espressioni, sostituite ad esempio nella  $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_y = \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x = -\partial B_y / \partial t$ , danno:

$$-k E_{0z} \sin(\omega t - kx + \phi) = \omega B_{0y} \sin(\omega t - kx + \psi).$$

L'identità sussiste solo se  $\omega$  è la stessa,  $\phi = \psi$  e se  $-E_{0z} = c \cdot B_{0y}$ .

Poiché posti  $E_y$  e  $B_z$  eguali a zero le precedenti relazioni soddisfano ancora le equazioni di Maxwell, risulta che in un'onda piana  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  oscillano in concordanza di fase ( $\phi = \psi$ ), sono ortogonali tra loro e, detto  $\mathbf{J}$  un versore che indica la direzione di propagazione dell'onda piana, tra essi e  $\mathbf{J}$  sussiste la relazione:

$$(\mathbf{J} \wedge \mathbf{E}) = \mathbf{B}c.$$





## VII.11 – EQUAZIONI DI MAXWELL NEI MEZZI MATERIALI.

Nei mezzi materiali, in presenza di cariche e correnti, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t.$$

dove  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  rappresentano densità di carica e di corrente vera e, se i mezzi sono dielettrici lineari con proprietà magnetiche praticamente insensibili (per cui si può assumere  $\mathbf{B}_{\text{mezzo}} = \mu \mathbf{H} \approx \mu_0 \mathbf{H}$ ) si ha  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}_{\text{dielettrico}} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{vuoto}}$ .  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{H}$  dipendono, chiaramente, dalle cariche e dalle correnti vere e sono indipendenti dal mezzo.

L'aria è in particolare il mezzo principe cui applicare queste equazioni. In particolare, a grande distanza da cariche e correnti, in un dielettrico puro, infinitamente esteso, omogeneo ed isotropo, le equazioni dei campi si scrivono

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{D} = -\epsilon \mu \partial \mathbf{H} / \partial t \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t.$$

Se applichiamo alla terza la relazione:  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$ , otteniamo:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{D} - \nabla^2 \mathbf{D} = -\nabla^2 \mathbf{D} = -\epsilon \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} / \partial t = -\epsilon \mu \partial^2 \mathbf{D} / \partial t^2 \quad \text{quindi: } \nabla^2 \mathbf{D} = \epsilon \mu \partial^2 \mathbf{D} / \partial t^2.$$

Analogamente, dalla quarta equazione di Maxwell si ottiene:  $\nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon \mu \partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2$ .

Nel dielettrico puro di costante dielettrica  $\epsilon$ , la **velocità di propagazione** delle onde e.m. risulta pertanto essere  $v = 1/\sqrt{\epsilon \mu} \approx 300.000 \text{ Km/sec}$ , dove  $n = (\sqrt{\epsilon \mu} / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}) > 1$  è l'**indice di rifrazione** del mezzo. Nel dielettrico puro si possono avere onde piane che mantengono, come nel vuoto, invariato il loro profilo.

Riprendiamo ora la relazione, che mutatis mutandis resta valida nei dielettrici:

$$(\mathbf{J} \wedge \mathbf{E}) = \mathbf{B}c/n = Z\mathbf{H} \quad \text{con } Z = \sqrt{(\mu/\epsilon)} \text{ Ohm.}$$

Nel vuoto,  $Z = Z_0 = \sqrt{(\mu_0/\epsilon_0)} = 376.6 \text{ Ohm}$  è detta **impedenza caratteristica del vuoto**. L'impedenza caratteristica del mezzo trasmissivo gioca, nella dinamica della trasmissione di onde, un ruolo fondamentale nel passaggio delle onde da un mezzo ad un altro, definendone il coefficiente di riflessione.

Se il mezzo è conduttore (ohmico) di conduttività  $\sigma$ , pur con proprietà dielettriche e magnetiche  $\epsilon$  e  $\mu$ , si deve sostituire a  $\mathbf{J}$ , nella quarta equazione,  $\sigma \mathbf{E}$ .

Con lo stesso procedimento usato precedentemente per ricavare l'equazione di D'Alembert, si ottiene ora:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \partial \mathbf{E} / \partial t + \epsilon \mu \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2.$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \partial \mathbf{H} / \partial t + \epsilon \mu \partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2.$$

Le onde piane che si ottengono, soluzioni di queste equazioni, sono onde che propagandosi si smorzano.

VII.12 - FLUSSO DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA, VETTORE DI POYNTING.

Le equazioni di Maxwell, colla predizione della propagazione delle onde elettromagnetiche, associa decisamente la energia elettrica e magnetica ai rispettivi campi, in quanto i campi possono propagarsi nel vuoto, senza la presenza delle sorgenti essenziale invece se si associa l'energia a queste ultime.

Anche una operazione molto semplice quale lo spostamento di una carica da un punto ad un altro, con conseguente variazione del campo elettrico ad essa associato, comporta una variazione dell'energia contenuta nel volume V racchiuso entro una qualunque superficie chiusa S, e quindi un flusso di energia attraverso S. Dimostriamo che tale flusso si calcola come flusso attraverso S del vettore di Poynting:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

Per dimostrarlo partiamo dalla matematica, ove si dimostra che, per qualunque  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$ :

$$\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H}.$$

Combiniamo la relazione precedente colla fisica, ove si assume:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad \text{e} \quad \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

Otteniamo: 
$$\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial t) - \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

da cui: 
$$\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = -\partial / \partial t (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} / 2 + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / 2) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Integriamo su V l'espressione precedente.

Il termine: 
$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$
 rappresenta l'energia dissipata entro V per unità di tempo sulle resistenze.

Il termine: 
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right) dV$$

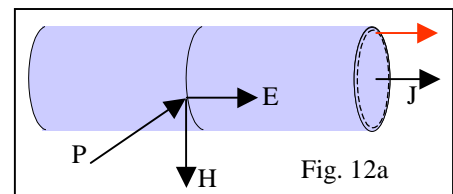
omogeneo al precedente, rappresenta la variazione per unità di tempo delle energie associate ai campi entro il volume V.

Ne consegue che: 
$$\int_V \text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) dV = \int_S (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

si deve interpretare come flusso di energia che transita istante per istante attraverso la superficie S che contorna V.

A conferma, si osservi che in un'onda elettromagnetica piana il vettore di Poynting risulta diretto nella direzione di propagazione dell'onda. L'energia trasportata per unità di superficie ed unità di tempo è  $P = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$  J/m<sup>2</sup>sec.

Nel caso di un conduttore in cui scorre una corrente continua,  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  in superficie sono orientati come in fig. 12a). L'energia che si trasforma in calore sulle resistenze, fluisce nel conduttore con P dall'esterno. Come vedremo, se E è un campo alternato ad alta frequenza, P si annulla entro pochi mm oltre la superficie del conduttore. La corrente scorre tutta in superficie e l'effetto costituisce il ben noto **effetto pelle** (skin effect).



VII.13 - RIFLESSIONE DI ONDE PIANE SUI DIELETTICI PURI. POLARIZZAZIONE.

Consideriamo due mezzi materiali 1 e 2, dielettrici puri, quindi di conduttività  $\sigma$  nulla. Siano  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  rispettivamente le costanti dielettriche dei due mezzi, ed assumiamo per ambedue, come abbiamo già fatto in precedenza,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Sia  $\Pi$  un piano che funge da superficie di separazione tra i due mezzi, che in più assumiamo essere omogenei e isotropi. Vogliamo ricavare, dalle equazioni di Maxwell, le leggi che regolano la riflessione e la trasmissione (rifrazione) di onde piane su  $\Pi$ .

Riflessione e rifrazione si trattano a partire da considerazioni di simmetria e di continuità nelle grandezze che si trasmettono attraverso la superficie sulla quale avviene il processo. Noi applicheremo le condizioni di continuità caratteristiche di  $\mathbf{E}$  e di  $\mathbf{H}$  alla superficie di separazione di due dielettrici puri.

Sia  $E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  l'equazione di un'onda piana, dove  $\mathbf{k}$  rappresenta il vettore di modulo  $k = 2\pi/\lambda$  e direzione e verso eguali a quello di propagazione dell'onda, ed  $\mathbf{r}$  rappresenta il vettore che dall'origine delle coordinate individua il punto dello spazio in cui vogliamo il valore della ampiezza istantanea dell'onda.

Definito **piano di incidenza** dell'onda il piano individuato da  $\mathbf{k}$  e dalla normale al piano  $\Pi$ , assumiamo come riferimento una terna cartesiana  $x, y, z$  tale che il piano  $yz$  coincida col piano di incidenza ed il piano  $xy$  coincida con  $\Pi$ . Indichiamo in fine con  $I, R$  ed  $r$  rispettivamente l'angolo di incidenza, l'angolo di riflessione e l'angolo di rifrazione dell'onda, definiti come in fig. 13a.

Indicati cogli apici R ed r le grandezze corrispondenti alle  $E, \omega, k_y$  e  $k_z$  che caratterizzano l'onda incidente, avremo

per l'onda incidente:  $E(y, z, t) = E_0 \cos(\omega t - k_y y - k_z z)$

per l'onda riflessa:  $E^R(y, z, t) = E_0^R \cos(\omega^R t - k_y^R y - k_z^R z)$

per l'onda rifratta:  $E^r(y, z, t) = E_0^r \cos(\omega^r t - k_y^r y - k_z^r z)$

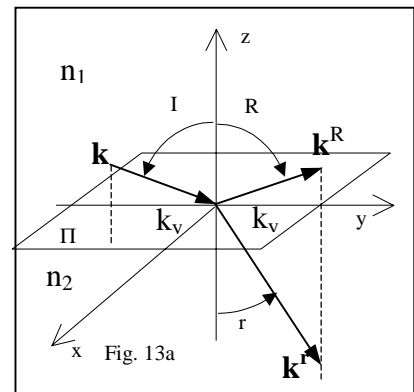
dove abbiamo assunto  $k_x^R = 0$  in quanto l'onda riflessa si propaga nello stesso mezzo dell'onda incidente, e quindi non vi è ragione che cambi essendo il mezzo omogeneo ed isotropo.

Le stesse ragioni di simmetria ci portano ad assumere  $k_x^r = 0$ , in quanto anche il mezzo 2 è omogeneo ed isotropo. Di fatto in presenza di anisotropie nella propagazione delle onde può comparire una componente  $k_x^r$  non nulla. Incontreremo questo comportamento, ad esempio, per la propagazione della luce nei cristalli birifrangenti, ma questi materiali, non isotropi, sono esclusi dalla discussione di questo paragrafo.

Supponiamo ora che il vettore  $\mathbf{E}$  vibri perpendicolarmente al piano di incidenza, sia quindi  $E = E_x$  ed  $E_y$  ed  $E_z = 0$ . Per la continuità della componente tangenziale di  $\mathbf{E}$  attraverso  $\Pi$ , sul piano  $z=0$  dev'essere  $\mathbf{E} + \mathbf{E}^R = \mathbf{E}^r$  per qualunque  $t$ , possibile solo se le pulsazioni temporali e spaziali delle tre onde sono eguali, cioè se  $\omega = \omega^r = \omega^R$  e  $k_y = k_y^R = k_y^r$ .

Ne segue innanzitutto che le pulsazioni temporali, quindi le frequenze delle tre onde sono indipendenti dal mezzo. Inoltre,  $k = 2\pi/\lambda = \omega n/c$ , dove  $n$  rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo. Poiché onda incidente ed onda riflessa si propagano nello stesso mezzo, sono eguali  $k$  e  $k^R$ , per cui dall'eguaglianza  $k_y = k_y^R$  si ha  $\sin I = k_y/k = k_y^R/k^R = \sin R$  da cui

$$I = R \text{ (legge della riflessione).}$$



Analogamente l'eguaglianza  $k_y^R = k_y^T$  comporta che sia  $k \sin I = k^r \sin r$  e quindi:

$$n_1 \sin I = n_2 \sin r \quad (\text{legge della rifrazione})$$

E' evidente, dalla espressione della legge della rifrazione, che se  $n_2 > n_1$  risulta sempre  $I > r$  (è quanto avviene in fig. 5a) mentre, per  $n_2 < n_1$   $I$  varia da  $I=0$  ad un valore massimo  $L < \pi/2$ , corrispondente a  $r = \pi/2$ , detto **angolo limite**. Per  $I > L$  si ha solo un'onda riflessa (**riflessione totale**).

Alle stesse espressioni delle leggi della riflessione e della rifrazione si giunge se **E** vibra nel piano di incidenza, perché in questo caso possiamo invocare la continuità della componente tangenziale di **H**, e ripetere il procedimento per un'onda ove **H** vibra nel piano perpendicolare al piano di incidenza.

Nell'onda incidente, **E** può vibrare nel piano di incidenza, nel piano perpendicolare o in tutti e due, con componenti rispettivamente  $E_{//}$  ed  $E_{\perp}$  ambedue non nulle. **Le leggi della riflessione e della rifrazione valgono ugualmente per  $E_{//}$  ed  $E_{\perp}$ .**

Diverso è però il comportamento delle due componenti a seconda che  $n_1 > n_2$  o  $n_1 < n_2$ .

La continuità delle componenti tangenziali di **E** di **H** permette infatti di calcolare il coefficiente  $E^R/E$ , quindi il coefficiente di riflessione per E, anche in funzione dell'angolo di incidenza. Diamo qui solo il risultato, diverso per  $E_{\perp}$  ed  $E_{//}$  dove  $E_{\perp}$  si intende che vibra perpendicolarmente al piano di incidenza, ed  $E_{//}$  che vibra parallelamente a detto piano.

$$\text{Per } E_{\perp} : \quad \frac{E^R}{E} = -\frac{\sin(I-r)}{\sin(I+r)} \quad \text{Per } E_{//} : \quad \frac{E^R}{E} = -\frac{\tan(I-r)}{\tan(I+r)}$$

E' evidente che queste due equazioni si riducono a rapporti 0/0 per  $I \rightarrow 0$ . Per risolvere il limite osserviamo che per incidenza quasi normale ( $I \rightarrow 0$ ) la legge della rifrazione si può approssimare con  $I = r(n_2/n_1)$ , ed anche la tangente si può confondere coll'angolo. Pertanto in ambedue i casi descritti il rapporto  $E^R/E$  diventa:

$$\left( \frac{E^R}{E} \right)_{I=0} = -\frac{r \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right)}{r \left( \frac{n_2}{n_1} + 1 \right)} = -\frac{(n_2 - n_1)}{(n_2 + n_1)}$$

Nelle figure seguenti si assume, per incidenza aria-vetro quasi normale  $|E^R/E| = .2$  ( $n_{aria} \approx 1, n_{vetro} \approx 1.5$ ) ed è descritto il comportamento di  $E_{\perp}$  e di  $E_{//}$  per  $n_1 < n_2$ .

Per  $n_1 < n_2$ , ed  $E = E_{\perp}$ ,  $E^R/E < 0$  per  $0 < I < \pi/2$ .  $E_{\perp}$  dopo la riflessione si rovescia (13-1).  
 Per  $n_1 < n_2$ , ed  $E = E_{\perp}$ ,  $E^R/E = -1$  per  $I = \pi/2$ .  $E_{\perp}$  dopo la riflessione si rovescia (13b).

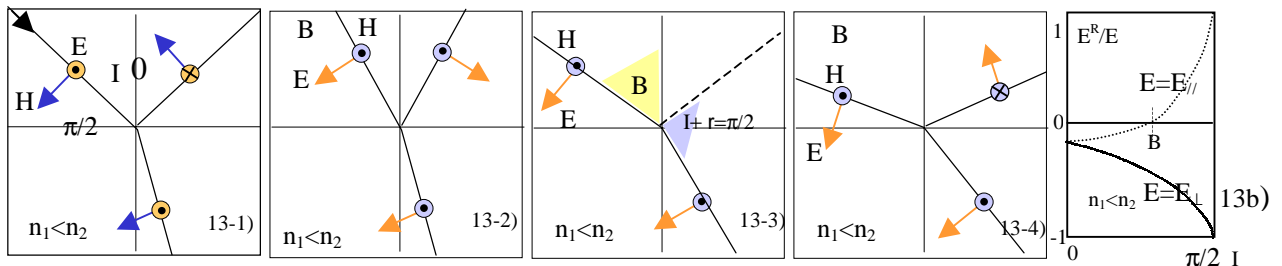
Per  $n_1 < n_2$ , ed  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E < 0$  per  $0 < I < B$ .  $E_{//}$  dopo la riflessione si rovescia (13-2).

**B (angolo di Brewster)** è l'angolo di incidenza  $I$  per il quale  $I+r=\pi/2$ .

Per  $n_1 < n_2$ , ed  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E = 0$  per  $I=B$ .  $E_{//}$  dopo la riflessione  $=0$  (13-3).

Per  $n_1 < n_2$ , ed  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E > 0$  per  $B < I < \pi/2$ .  $E_{//}$  dopo la riflessione non si rovescia (13-4).

Per  $n_1 < n_2$ , ed  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E = 1$  per  $I = \pi/2$ .  $E_{//}$  dopo la riflessione non si rovescia (13b).



Nella serie di figure seguenti è descritto il comportamento di  $E_{\perp}$  e di  $E_{//}$  per  $n_1 > n_2$ .

Per  $n_1 > n_2$ , ed  $E = E_{\perp}$ ,  $E^R/E > 0$  per  $0 < I < L$ .  $E_{\perp}$  dopo la riflessione non si rovescia (13-5).

**L (angolo limite)** è l'angolo di incidenza  $I$  per il quale  $r=\pi/2$ .

Per  $n_1 > n_2$ , ed  $E = E_{\perp}$ ,  $E^R/E = 1$  per  $L < I < \pi/2$ . **Riflessione totale** (13c).

Per  $n_1 > n_2$ ,  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E > 0$  per  $0 < I < B$ .  $E_{//}$  dopo la riflessione non si rovescia (13-6).

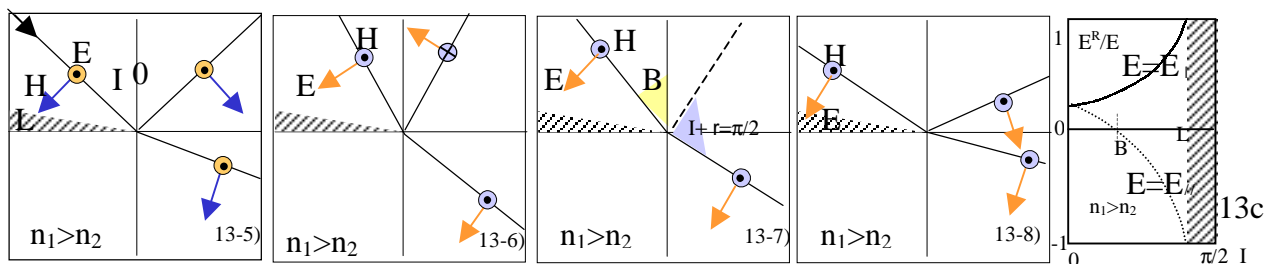
**B (angolo di Brewster)** è l'angolo di incidenza  $I$  per il quale  $I+r=\pi/2$ .

Per  $n_1 > n_2$ , ed  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E = 0$  per  $I=B$ .  $E_{//}$  dopo la riflessione  $= 0$  (13-7).

Per  $n_1 > n_2$ , ed  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E < 0$  per  $B < I < L$ .  $E_{//}$  dopo la riflessione si rovescia (13-8).

**L (angolo limite)** è l'angolo di incidenza  $I$  per il quale  $r=\pi/2$ .

Per  $n_1 > n_2$ , ed  $E = E_{//}$ ,  $E^R/E = -1$  per  $L < I < \pi/2$ . **Riflessione totale** (13c).



La situazione più generale della riflessione di un'onda piana qualunque si risolve scomponendo  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  in due componenti parallela e perpendicolare al piano di incidenza, calcolando le ampiezze dell'onda riflessa e rifratta per ambedue e sommandole.

Per un'onda incidente secondo l'angolo di Brewster, dalla riflessione emerge solo la componente in cui  $\mathbf{E}$  vibra perpendicolarmente al piano di incidenza, (componente rossa, Fig. 13d). Poiché un fascio di **luce** parallela (ad esempio luce solare) contiene onde che vibrano in tutte le direzioni, facendola riflettere su un piano in condizioni di Brewster si ottiene luce in cui  $\mathbf{E}$  vibra in una sola direzione. Si dice in questo caso che la luce riflessa è **polarizzata** rettilineamente nel piano di incidenza.

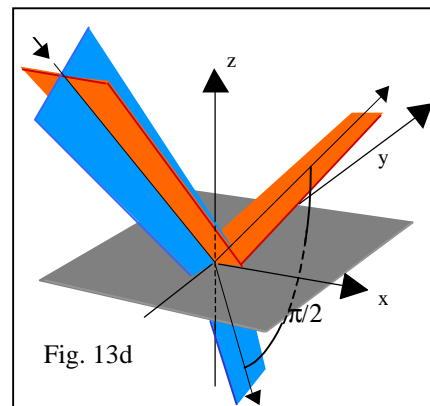


Fig. 13d

Tornando ad una singola onda piana, immaginiamo che essa si propaghi in direzione perpendicolare alla figura 13e, quindi verso il lettore. Il vettore  $\mathbf{E}$  sia diretto come in figura, quindi con componenti  $E_x$  ed  $E_y$ .

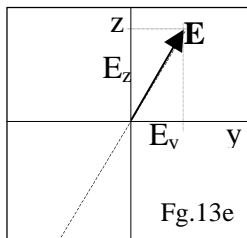


Fig.13e

Le due componenti vibrano in concordanza di fase. Il loro diagramma temporale sarà infatti descritto da due equazioni del tipo:

$$E_y = E^0_y \cdot \cos \omega t \quad \text{ed} \quad E_z = E^0_z \cdot \cos \omega t$$

Esse sono tali perché descrivono un'onda polarizzata rettilineamente. Ma le equazioni di Maxwell non impongono alcun "accoppiamento" di questo o altro tipo tra esse. Tra esse può, ad esempio, esservi uno sfasamento  $\Phi$  per cui le rispettive equazioni

risulterebbero:

$$E_y = E^0_y \cdot \cos \omega t \quad \text{ed} \quad E_z = E^0_z \cdot \cos(\omega t + \Phi).$$

Per  $E^0_y = E^0_z$  e  $\Phi = \pi/2$  la punta di  $\mathbf{E}$  descriverebbe una traiettoria circolare, e l'onda si direbbe **polarizzata circolarmente**, altrimenti (e.g.  $E^0_y \neq E^0_z$  e  $\Phi \neq \pi/2$ ), la punta di  $\mathbf{E}$  descriverebbe un'ellisse e l'onda si direbbe **polarizzata ellitticamente** (Fig. 13f). Un'onda polarizzata rettilineamente, con opportuni accorgimenti tecnici, che vedremo, può essere trasformata in un'onda polarizzata ellitticamente, e viceversa.

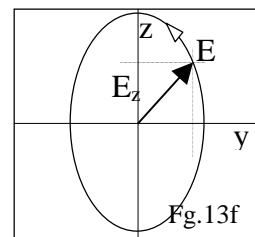


Fig.13f

VII.14 - ONDE ELETTROMAGNETICHE NEI CONDUTTORI.

Nei mezzi materiali a conduttività elettrica  $\sigma$  non nulla, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\text{div}\mathbf{D}=0 \quad \text{rot}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t \quad \text{div}\mathbf{H}=0 \quad \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t.$$

dove assumeremo  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ . Collo stesso procedimento utilizzato per ottenere l'equazione differenziale delle onde nel caso del vuoto e dei dielettrici puri si ottiene:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \sigma\mu\partial\mathbf{E}/\partial t + \epsilon\mu\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 \quad \text{e} \quad \nabla^2\mathbf{H} = \sigma\mu\partial\mathbf{H}/\partial t + \epsilon\mu\partial^2\mathbf{H}/\partial t^2$$

Ricordiamo che per  $\sigma=0$  e  $\nabla^2 = \partial/\partial x$ , quindi nell'ipotesi di onde piane, avremmo assunto, ad esempio per E, una soluzione di tipo sinusoidale del tipo  $\underline{E}=E_0e^{i(\omega t - kx)}$  e, sostituendola nella equazione differenziale, avremmo verificato a posteriori l'assunto. Avremmo poi adottato come descrizione dell'onda piana l'equazione  $E=E_0\cos(\omega t-kx)$ , cioè la parte reale dell'esponenziale complesso  $\underline{E}=E_0e^{i(\omega t - kx)}$  {  $E_0\cos(\omega t-kx) = \text{Re} (E_0e^{i(\omega t - kx)})$  }.

In un mezzo a  $\sigma \neq 0$  possiamo applicare, almeno formalmente, lo stesso procedimento. Per un'onda piana sinusoidale, assumiamo una equazione del tipo:  $\underline{E}=E_0e^{i\omega t - \gamma x}$ .

Sostituendo  $\underline{E}$  nella equazione differenziale troveremo la espressione di  $\gamma$  per cui la equazione è soddisfatta.

Essa risulta: 
$$\gamma = \pm \sqrt{i\sigma\mu\omega - \epsilon\mu\omega^2} = \pm i\omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \pm i\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} \quad \text{dove:} \quad \epsilon_c = \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}$$

Pertanto 
$$E = \text{Re} \left\{ E_0 e^{i\omega(t - x\sqrt{\mu\epsilon_c})} \right\} = \text{Re} \left\{ E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \right\} \quad \text{posto} \quad \underline{k} = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c} = \omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)}$$

In conclusione il formalismo ci porta a definire una analogia tra propagazione nei dielettrici puri e propagazione nei conduttori, analogia che si esplica nella ridefinizione della costante dielettrica  $\epsilon$  come numero complesso  $\epsilon_c$ , ove la parte reale è quella che conosciamo, definita staticamente, e la parte immaginaria è  $-i\sigma/\omega$ , quindi dipende dalla conduttività e dalla frequenza dell'onda. Di conseguenza anche il  $\underline{k}$  che compare nell'esponenziale con cui abbiamo espresso la soluzione è complesso.

L'espressione di E compresa tra le parentesi graffe è di difficile interpretazione. Osserviamo però che  $\epsilon \approx 10^{-11}$  Farad/m, mentre ad esempio nel rame  $\sigma \approx 6.10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  ed  $\omega$ , per le onde Hertziane, è dell'ordine dei Megahertz. Pertanto nei mezzi che abbiamo definito buoni conduttori dell'elettricità la parte immaginaria di  $\epsilon_c$  è dominante, per cui le proprietà ottiche della propagazione (riflessione, rifrazione) non dipenderanno dalla polarizzabilità del mezzo, cui è invece legata la costante dielettrica statica.

Di conseguenza anche il radicando di  $\underline{k}$  ha parte reale  $\ll$  parte immaginaria Ne segue che  $\underline{k} \approx \sqrt{-i\mu\sigma\omega} = \pm \sqrt{(\mu\sigma\omega)}\sqrt{(1-i)}/\sqrt{2} = \pm k\sqrt{(1-i)}$ .

A conti fatti si ottiene: 
$$\underline{E} = E_0 e^{-kx} \cdot e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \quad \text{avendo posto} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

da cui: 
$$E = \text{Re} \left( E_0 e^{-kx} \cdot e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \right) = E_0 e^{-kx} \cos(\omega t - kx)$$

In conclusione, se un'onda avente  $\omega = 10^8$  rad/sec viaggiando nell'aria incontra una lastra di rame, nel rame l'ampiezza del campo elettrico si riduce ad  $E_0/e$  entro  $x = 1/k=1.6$  mm!. La distanza  $1/k$  viene detta **lunghezza di assorbimento** (effetto pelle, par. 2!). Inoltre, il rapporto  $E/H = \sqrt{(\mu/\epsilon)} \approx 100$  nell'aria, nel rame diventa  $E/H = \sqrt{(\mu/\epsilon_c)} = \sqrt{(\mu/\epsilon_c)} = \sqrt{(i\omega\mu/\sigma)}$  che, in modulo, risulta dell'ordine di  $10^{-3}$ . Di conseguenza la potenza trasportata dall'onda  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$  che nel rame andrebbe dissipata in calore praticamente si annulla. Sul rame anche E praticamente si annulla; l'onda viene in gran parte riflessa formando alla superficie del rame un nodo per E, un ventre per H.

VII.15 – NUOVA DEFINIZIONE DEI POTENZIALI ELETTRICI E MAGNETICI.

La formulazione differenziale delle equazioni dell'elettromagnetismo ci permette di ridefinire i potenziali, in particolare il potenziale magnetico. Infatti, la relazione  $\text{div}\mathbf{B} \equiv 0$  comporta che  $\mathbf{B}$  si possa sempre considerare il rotore di un ipotetico campo vettoriale  $\mathbf{A}$ , cioè  $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$ . Ne segue che se in condizioni stazionarie assumiamo che sia  $\text{div}\mathbf{A}=0$ , dalla  $\text{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}$  (valida anch'essa in condizioni stazionarie) segue

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}$$

Si ottengono così tre equazioni nelle componenti di  $\mathbf{A}$ ,

$$\nabla^2 A_x = \partial^2 A_x / \partial x^2 + \partial^2 A_x / \partial y^2 + \partial^2 A_x / \partial z^2 = -\mu_0 J_x$$

$$\nabla^2 A_y = \partial^2 A_y / \partial x^2 + \partial^2 A_y / \partial y^2 + \partial^2 A_y / \partial z^2 = -\mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = \partial^2 A_z / \partial x^2 + \partial^2 A_z / \partial y^2 + \partial^2 A_z / \partial z^2 = -\mu_0 J_z$$

dello stesso tipo della equazione di Poisson:

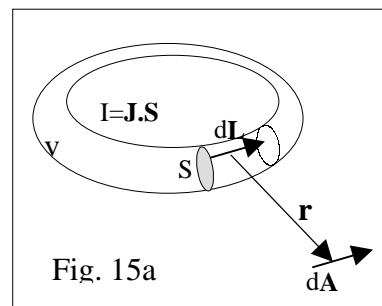
$$\nabla^2 V = \partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 + \partial^2 V / \partial z^2 = -\rho / \epsilon_0$$

che regola il potenziale scalare elettrostatico. Pertanto  $\mathbf{A}$  viene detto **potenziale vettore del campo magnetico**. Per analogia con la sua versione scalare le sue soluzioni per un circuito percorso da corrente avranno l'espressione:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{r} dv$$

dove  $v$  rappresenta il volume occupato dal circuito ed  $r$  la distanza dell'elemento  $dv$  dal punto potenziato. In particolare, se  $dv=SdL$  rappresenta il volume occupato da un elemento di circuito, e posto  $JS=I$ , la corrente che circola nel circuito, da distanza  $r$  esso contribuirà al potenziale con

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{L}}{r}$$



da cui si ricava  $d\mathbf{B} = \text{rot}(d\mathbf{A})$ , il contributo dell'elemento  $d\mathbf{L}$  al campo a distanza  $r$ .

$d\mathbf{A}$  è il prodotto di uno scalare  $S=1/r$  per un vettore  $\mathbf{V}=d\mathbf{L}$ . Quindi nel calcolo del  $\text{rot}(d\mathbf{A})$  dobbiamo applicare la formula del rotore di uno scalare per un vettore; dalla sua applicazione si ottiene:

$$d\mathbf{B} = \text{rot}(d\mathbf{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\text{rot}(d\mathbf{L})}{r} + \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge d\mathbf{L} \right).$$

All'interno di  $dv$  il vettore  $d\mathbf{L}$  è costante, quindi il suo rotore si annulla. Resta il secondo termine ove  $\text{grad}(1/r) = -(1/r^2)(\mathbf{r}/r)$ . Si ritrova pertanto, per correnti stazionarie, la formula di Laplace:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{L} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$$



In condizioni non stazionarie i potenziali vanno ulteriormente ridefiniti. Infatti dalla  $\mathbf{rotE} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$  e dalla  $\mathbf{B} = \mathbf{rotA}$  con cui abbiamo definito il potenziale vettore in condizioni stazionarie si ottiene  $\mathbf{rotE} = -\mathbf{rot}\partial\mathbf{A}/\partial t \neq 0$  per cui la  $\mathbf{rotE} = 0$  dalla quale abbiamo dedotto le proprietà del potenziale elettrostatico  $V$  va sostituita colla relazione, valida in condizioni sia statiche ( $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ ) sia dinamiche:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0.$$

Dobbiamo quindi ridefinire  $V$  come lo scalare per il quale:

$$\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\mathbf{grad}V \quad \text{Ridefinizione di } V$$

Ricordiamo inoltre che nella definizione del potenziale vettore in condizioni stazionarie abbiamo assunto  $\text{div}\mathbf{A} = 0$ . Dimostriamo che nelle condizioni dinamiche, tipiche di potenziali che si propagano per onde, dobbiamo assumere anche  $\text{div}\mathbf{A} \neq 0$ .

Infatti, partendo dalle equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\text{div}\mathbf{E} = 0, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{rotE} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \quad \mathbf{rotB} = (1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$$

introduciamo la nuova relazione ottenuta per i potenziali:  $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \mathbf{grad}V$ .

Si ottiene, dalla  $\text{div}\mathbf{E} = 0$ :  $\text{div}(\partial\mathbf{A}/\partial t) + \text{div}\mathbf{grad}V = 0$ .

Da essa, aggiungendo e togliendo  $(1/c^2)\partial^2 V/\partial t^2$  si ottiene:

$$\nabla^2 V - (1/c^2)\partial^2 V/\partial t^2 - \partial/\partial t(\text{div}\mathbf{A} + (1/c^2)\partial V/\partial t) = 0$$

quindi  $\nabla^2 V - (1/c^2)\partial^2 V/\partial t^2 = 0$  se  $\partial/\partial t(\text{div}\mathbf{A} + (1/c^2)\partial V/\partial t) = 0$

quindi se  $\text{div}\mathbf{A} + (1/c^2)\partial V/\partial t$  è indipendente dal tempo.

Parimenti, dalla  $\mathbf{rotB} = (1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t$ , sostituendo  $\mathbf{B} = \mathbf{rotA}$  ed  $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \mathbf{grad}V$  si ottiene:

$$\mathbf{rot}\mathbf{rotA} = \mathbf{grad}\text{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = -(1/c^2)(\partial/\partial t\mathbf{grad}V + \partial^2\mathbf{A}/\partial t^2)$$

da cui:  $\nabla^2\mathbf{A} - (1/c^2)\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = 0$  se  $\mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{A} + (1/c^2)\partial V/\partial t) = 0$ , quindi se:

$$\text{div}\mathbf{A} + (1/c^2)\partial V/\partial t \quad \text{è costante nello spazio.}$$

In quanto segue assumeremo  $\text{div}\mathbf{A} + (1/c^2)\partial V/\partial t = 0$  Ridefinizione della  $\text{div}\mathbf{A}$

La condizione imposta sui potenziali:  $\text{div}\mathbf{A} + (1/c^2)\partial V/\partial t = 0$  è detta **condizione di Lorentz**.

VII.16 - POTENZIALI IN PRESENZA DI CARICHE E CORRENTI.

Al cap. II, al par. 8, abbiamo introdotto una formula che fornisce una soluzione particolare della equazione di Poisson  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ , in cui si vede come in condizioni stazionarie, con una qualunque distribuzione di cariche al finito, il potenziale elettrostatico sia univocamente determinato (assunto  $V(\infty)=0$ ) dalla conoscenza di tale distribuzione. In più dalla formula emerge il fatto che il potenziale è anche univocamente determinato all'interno di una qualunque superficie chiusa  $\Sigma$  se si conoscono le distribuzioni delle cariche entro  $\Sigma$  ed i potenziali assieme alle loro derivate direzionali  $\partial V/\partial n$  su tutto  $\Sigma$  dove  $n$  rappresenta un versore normale a  $\Sigma$  diretto verso l'esterno di  $\Sigma$ . (ricordiamo che  $\mathbf{grad}V \cdot d\mathbf{\Sigma} = (\partial V/\partial n)d\Sigma$ ).

Per i potenziali in condizioni dinamiche, mutatis mutandis, vale una formula analoga nota come integrale di Kirkhoff, soluzione della equazione non omogenea di propagazione dei potenziali:

$$\nabla^2 V - (1/c^2)\partial^2 V/\partial t^2 = -\rho/\epsilon_0$$

che si ricava con procedimento analogo a quello applicato al paragrafo precedente partendo però dalle equazioni dei campi in presenza di cariche, cioè dalla  $\text{div}\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  invece che dalla  $\text{div}\mathbf{E}=0$ . Allo stesso modo, in presenza di correnti, la  $\mathbf{rot}\mathbf{B}=(1/c^2)\partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_0\mathbf{J}$  porta alla equazione per il potenziale vettore

$$\nabla^2 \mathbf{A} - (1/c^2)\partial^2 \mathbf{A}/\partial t^2 = -\mu_0\mathbf{J}$$

ed ad un integrale analogo. L'integrale di Kirkhoff fornisce la chiave per passare dalla trattazione delle onde elettromagnetiche all'ottica ondulatoria quale fu formulata, agli inizi dell'800, da Fresnel, in analogia colle onde meccaniche. La teoria di Fresnel ha permesso lo sviluppo dell'ottica per tutto l'800 mentre l'integrale di Kirchoff è ovviamente della seconda metà dell'800. Pertanto esso suggella a posteriori la validità dei principi su cui l'ottica ondulatoria si è basata per oltre un secolo, e conferma, qualora ve ne fosse bisogno, la natura elettromagnetica della luce.

Questo paragrafo è dunque dedicato alla derivazione della formula di Kirkhoff.

Nel caso dinamico si può procedere allo stesso modo, solo va tenuto presente che la funzione da porre, nell'enunciato del teorema di Green, eguale a  $\Psi$ , deve essere una soluzione della equazione di d'Alembert  $\nabla^2 \Psi - (1/c^2)\partial^2 \Psi/\partial t^2 = 0$ . Una possibile funzione con queste caratteristiche è  $\Psi(r,t) = (1/r)f(t-r/c)$  con  $f$  di forma qualunque (e.g. sinusoidale). La  $\Psi$  scelta è infatti l'equazione che descrive onde sferiche, che sappiamo soddisfare l'equazione di D'Alembert (scritta in coordinate polari).

Il calcolo, piuttosto complesso, porta alla seguente soluzione:

$$V(P,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbf{v}} \frac{\rho(t-r/c)}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{S}} \frac{1}{r} \left\{ \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_{t-r/c} + \frac{V(t-r/c)}{r} \right] \cdot \cos\mathbf{nr} + \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_{t-r/c} \right\} dS$$

dove si è introdotta la derivata direzionale  $\partial V/\partial n = \mathbf{grad}V \cdot \mathbf{n}$  con  $\mathbf{n}$  versore normale ad  $S$  diretta verso l'esterno.

Il primo integrale fornisce i **potenziali ritardati**, cosiddetti perché il potenziale in  $P$  all'istante  $t$  dipende dalla carica che c'era  $r/c$  secondi prima a distanza  $r$ . Gli altri tre integrali danno  $V(P)$  all'istante  $t$  noti i potenziali e le loro derivate direzionali e temporali su una superficie chiusa  $S$  al tempo  $t-r/c$ .

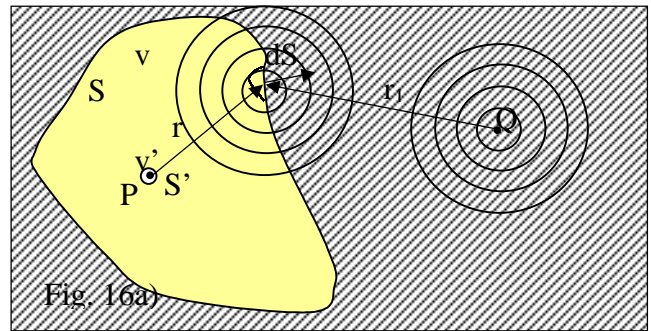
E' questa seconda situazione che ci interessa in quanto tipica dell'ottica.

Immaginiamo una sorgente puntiforme che emette onde sferiche di lunghezza d'onda  $\lambda$ . Detta  $r_1$  la distanza tra la sorgente e un punto qualunque su  $S$ , il potenziale in quel punto all'istante  $t$  è dato da  $V(r_1, t) = (A/r_1)e^{i\omega(t-r_1/c)}$ .

Pertanto  $\partial V/\partial t = i\omega(A/r)e^{i\omega(t-r/c)}$  e  $\partial V/\partial n = A\cos\mathbf{nr}(1/r_1 + i\omega/c)e^{i\omega(t-(r+r_1)/c)}$ . Queste derivate, sostituite nella equazione che fornisce  $V(P, t)$  a pag. precedente, per  $r$  ed  $r_1 \gg \lambda$  forniscono la seguente semplice espressione per  $V(P, t)$ :

$$V(P, t) = \int_S \frac{iA}{2\lambda r_1 r} e^{i\omega(t-(r+r_1)/c)} (\cos\mathbf{nr} - \cos\mathbf{nr}_1) dS$$

La interpretazione è la seguente: La sorgente puntiforme  $Q$  emette onde sferiche di potenziale. Su tutti gli elementi  $dS$  della superficie  $S$  le onde producono dei potenziali sinusoidali la cui ampiezza è  $A/r_1$ . Questi elementi di superficie si comportano a loro volta come sorgenti e l'ampiezza che ciascuno di essi contribuisce in  $P$  è data dalla formula di Kirchoff, scritta sopra. Integrando su  $S$  si ha quindi l'ampiezza totale dell'onda



emessa da  $Q$  che investe  $P$ . Il termine tra parentesi varia tra 0 e 2 (è circa 2 in fig. 7b) ed è detto **fattore di obliquità**. La fase dell'onda sarebbe  $\omega(t-(r+r_1)/c)$  se non fosse per l'unità immaginaria che moltiplicando l'ampiezza ha l'effetto di introdurre nella fase uno sfasamento costante di  $\pi/2$ .

