

## CAPITOLO VIII

### OTTICA GEOMETRICA

#### VIII. 1 – OTTICA GEOMETRICA ED OTTICA FISICA.

La luce è una radiazione contenuta in quella piccola porzione dello spettro elettromagnetico cui l'occhio umano risulta essere sensibile, compresa nell'intervallo di frequenze  $.38 \div .79 \cdot 10^{15}$  Hz e di lunghezza d'onda (nel vuoto e in pratica anche nell'aria) compresa nell'intervallo  $.79 \div .39\mu$ . Si tratta di onde sinusoidali, emesse dagli atomi, la cui esistenza è stata dimostrata da Hertz, a fine 800.

La discussione sulla natura della luce ha una lunga storia, ma noi la facciamo iniziare nel 1600. Infatti, nel 1600, ha inizio un vertiginoso sviluppo dell'ottica legato alla scoperta, da parte di Keplero, del meccanismo della visione. In assenza di un valido modello fisico, l'ottica kepleriana si svilupperà però come una geometria, i cui elementi (i raggi di luce) saranno segmenti, rette o semirette che dovranno soddisfare postulati come la legge della riflessione e la legge della rifrazione. A questa ottica, a ragione detta **ottica geometrica**, dedicheremo i prossimi paragrafi perché costituisce, ancora oggi, uno strumento formidabile per la comprensione del funzionamento di tutti quegli strumenti che per quattro secoli hanno permesso all'uomo di scrutare l'infinitamente lontano e l'infinitamente piccolo.

Però nel '600 viene anche scoperta la diffrazione. Nel 1663 Padre Grimaldi scriveva infatti: *"lumen propagatur seu diffunditur non solum directe, refracte et reflexe, sed etiam quarto modo diffracte"*. Questa lapidaria affermazione va al cuore del problema della natura della luce, in quanto evidenzia come la "luce" non appaia sempre propagarsi in linea retta come avviene normalmente nella propagazione libera, in un mezzo omogeneo, o dopo che è stata riflessa, rifratta o diffusa. Padre Grimaldi afferma infatti con sicurezza che la luce ha un quarto modo di propagazione, per cui in presenza di un ostacolo sembra aggirarlo penetrando in quella che nel prossimo paragrafo indicheremo come la sua zona d'ombra.

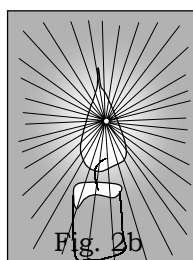
Malgrado questa evidenza, che è ovviamente a favore di una natura ondulatoria della luce, e specialmente per l'influenza di Newton che non trovava, nei modelli ondulatori via via proposti (in particolare il modello ondulatorio di Huygens), una spiegazione soddisfacente alla propagazione rettilinea della luce, per tutto il 700 verrà attribuita alla luce una natura corpuscolare (modello di Newton), ove la diffrazione non viene negata, ma resta semplicemente non spiegata.

Finché, agli inizi dell'800, si saranno accumulati tali e tanti fenomeni inspiegabili in termini del modello corpuscolare da riportare prepotentemente alla ribalta il problema della natura della luce, con la dimostrazione incontrovertibile (Thomas Young, 1801) della sua natura ondulatoria. Agli inizi dell'Ottocento nasce quindi l'ottica fisica, in cui si immagina che la luce rappresenti la propagazione in un mezzo incorporato, l'etere, di onde trasversali in tutto e per tutto simili a quelle che poi, a fine secolo, Hertz scoprirà essere le onde elettromagnetiche. Nella sua forma classica, l'ottica fisica costituirà l'argomento del prossimo capitolo.

Ma la storia dell'ottica non finisce qui. Infatti, con l'invenzione di strumenti analitici sempre più raffinati come i reticoli di diffrazione e soprattutto gli interferometri, si potranno studiare a fondo le radiazioni emesse dagli atomi svelandone la struttura. Questa conoscenza porterà ad una nuova concezione dei meccanismi con cui la luce viene emessa, e permetterà di porre le basi dell'ottica quantistica, che a fine 900 porterà alla scoperta di una sorgente di luce del tutto nuova, il Laser.

## VIII.2 - RAGGI DI LUCE.

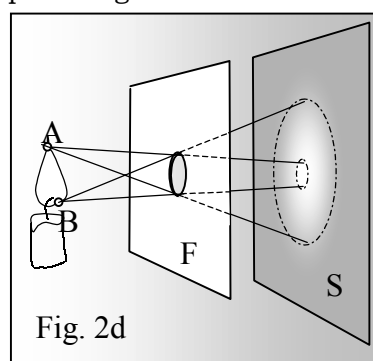
In fig 2a la fiamma di una candela rappresenta una **sorgente** di luce. Posto uno schermo forato F davanti alla sorgente, intercettiamo la luce che attraversa il foro con un secondo schermo S. Su S osserveremo una zona uniformemente illuminata contornata da una zona in cui la luce è degradante (**penombra**) verso l'esterno fino a raggiungere una zona non illuminata (**ombra**).



Possiamo identificare queste tre zone assumendo che la sorgente sia composta da un mosaico di sorgenti elementari puntiformi ciascuna delle quali emette luce in tutte le direzioni, direzioni che per ciascuna sorgente elementare rappresentiamo con tante semirette come in fig. 2b.

Tornando a fig. 2a, se non esistesse lo schermo F, per un punto qualunque di S passerebbero tante semirette quante sono le sorgenti elementari che emettono luce sulla fiamma della candela.

Interponendo F (Fig. 2c), i vari punti di S verranno raggiunti solo dalle semirette passanti per il foro. E' allora immediato osservare che mentre per il punto P di S passeranno ancora tante semirette quante sono le sorgenti, perché nessuna delle semirette congiungenti le sorgenti con P viene intercettata da F, per il punto Q ne passeranno di meno. Anzi, se spostiamo Q verso il bordo di S, nessuna delle sorgenti elementari distribuite sulla fiamma potrà inviarti luce in quanto ogni semiretta diretta verso Q verrà intercettata da F.



Una semplice costruzione geometrica (Fig. 2d) ci permette di dividere S in tre zone; la prima, contenente P, ove nessuna semiretta proveniente dalla sorgente viene intercettata da F; la seconda, ove le semirette che ne congiungono i punti alla sorgente sono in parte intercettate da F; la terza, e quella in cui tutte le semirette sono intercettate. La prima zona risulta coincidere con quella uniformemente illuminata, la seconda con la zona di penombra, la terza con la zona d'ombra.

In base a questa coincidenza possiamo associare l'**intensità** con cui ciascun punto di S è illuminato col numero di semirette che lo raggiungono partendo dalla sorgente di luce.

Con questo si assume, implicitamente, che la sorgente sia costituita da un mosaico di sorgenti elementari, puntiformi, che la luce che ne esce sia descrivibile con tante semirette e che ciascuna semiretta porti con sé una porzione della luce emessa dalla sorgente elementare di partenza.

In queste ipotesi le semirette cessano di essere enti puramente geometrici per diventare gli ingredienti base dell'ottica geometrica, i **raggi di luce**.

I raggi di luce si propagano in linea retta e rappresentano le traiettorie descritte da una forma di energia che sommandosi in un punto qualunque alle energie portate da altri raggi provenienti da altre sorgenti fisicamente diverse determina l'intensità con cui detto punto è illuminato.

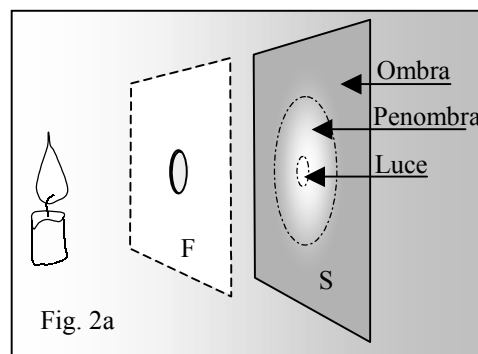


Fig. 2a

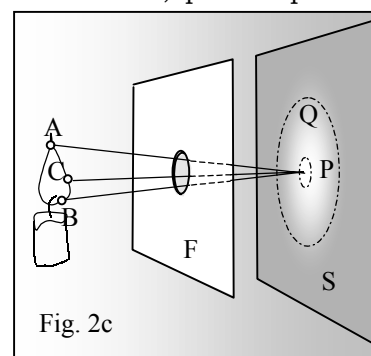
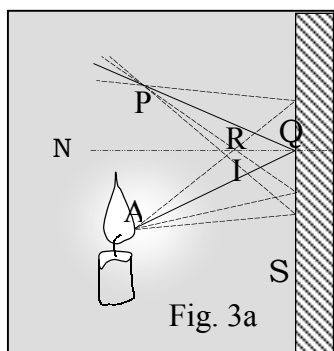


Fig. 2c

### VIII.3 - RIFLESSIONE E RIFRAZIONE.

Nel paragrafo precedente abbiamo implicitamente introdotto il primo postulato dell'ottica geometrica, secondo il quale se la luce deve andare da una sorgente elementare A ad un punto P in un mezzo omogeneo ed isotropo, tra tutti i cammini possibili essa sceglie la linea retta che unisce A a P.

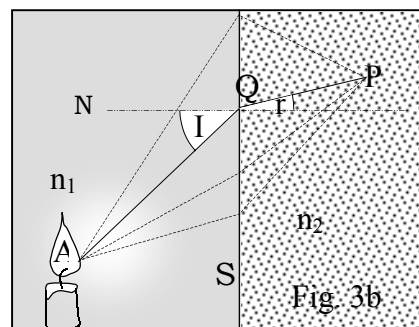
Il secondo postulato riguarda la riflessione della luce. Se la luce deve andare da una sorgente elementare A al punto P in un mezzo omogeneo ed isotropo, ma dopo aver subito una riflessione su una superficie S, tra tutti i cammini possibili (tratteggiati in fig. 3a) essa sceglie quello per cui raggio incidente, raggio riflesso e normale N alla superficie nel punto di incidenza giacciono sullo stesso piano e per i quali detto I l'angolo formato dal raggio incidente con N (angolo di incidenza) ed R l'angolo formato dal raggio riflesso con N (angolo di riflessione) si ha



$$I=R.$$

Il terzo postulato riguarda la rifrazione: Se A e P si trovano in mezzi (omogenei ed isotropi)

diversi, di indice di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ , separati da una superficie S, tra tutti i cammini possibili per andare da A a P (Fig. 3b) la luce sceglie quello per cui raggio incidente, raggio rifratto e normale alla superficie nel punto di incidenza stanno sullo stesso piano e per cui, detti I ed r rispettivamente l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione del raggio scelto,

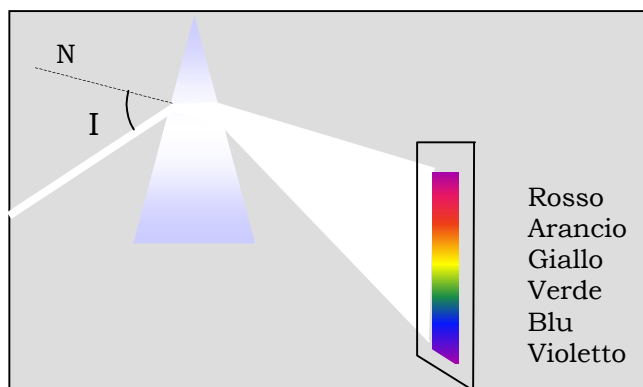


$$n_1 \sin I = n_2 \sin r,$$

dove  $n_1$  ed  $n_2$  sono gli indici di rifrazione dei due mezzi rispetto al vuoto, definiti per un'onda elettromagnetica che si propaga in un dielettrico (come l'aria o il vetro) di costante dielettrica  $\epsilon$  e permeabilità magnetica  $\mu$  come  $n=\sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$ . In questo mezzo la velocità dell'onda elettromagnetica è  $c/n$ .

L'indice di rifrazione così definito, in termini del valore della costante dielettrica del mezzo misurata staticamente, ad esempio misurando la capacità di un condensatore in cui lo spazio tra le armature sia stato riempito di dielettrico, è costante, ed è corretto per le onde Hertziane, cioè prodotte con oscillatori costruiti dall'uomo. Per gli oscillatori naturali, la relazione precedente è valida solo come ordine di grandezza, e soprattutto non è costante, in quanto cresce con la frequenza.

Il fenomeno è detto dispersione in quanto si manifesta, per un dato angolo di incidenza I, ed  $n_2 > n_1$ , (come in fig. 3b), come un angolo di rifrazione r crescente con la frequenza, in pratica crescente in funzione del colore della luce. La esistenza della dispersione, nella luce, si può facilmente verificare a partire da un fascetto di luce solare facendolo incidere su un prisma di vetro, che ha l'effetto di amplificare l'effetto della dispersione.  $n_2$ , quindi l'angolo di deviazione, risulta essere massimo per il violetto, minimo per il rosso.



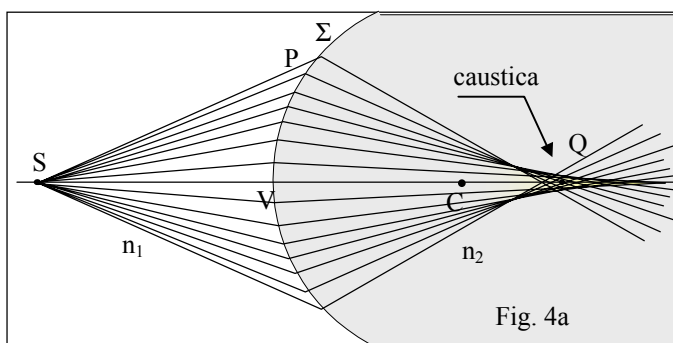
VIII.4 - FOCALIZZAZIONE.

I tre postulati dell'ottica geometrica sono abbastanza intuitivi anche se la legge della rifrazione, che contiene funzioni trigonometriche, dovrà attendere fino al XV secolo (1615) per essere enunciata nella forma attuale dall'olandese Willebrod Snell. Non si sa se Snell abbia coniato questo enunciato prima o dopo Renè Descartes, che nel 1637 ne fece largo uso per sviluppare una completa teoria dell'arcobaleno.

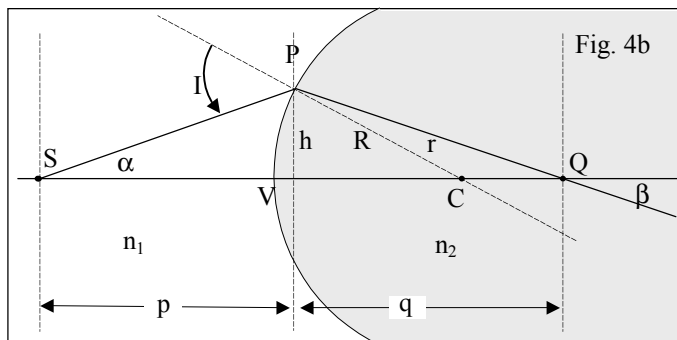
I tre postulati indicano quale cammino sceglierà la luce per andare da un punto ad un altro. In alcuni casi però questo cammino non risulta essere unico. L'esempio classico lo si ritrova nell'opera di Keplero Dioptrice, datata 1611, il tutto ad ulteriore testimonianza di quanto precocemente si sia sviluppata l'ottica dei raggi di luce.

Un diottro è costituito da due mezzi di indice di rifrazione diverso, separati da una superficie che può essere a piacere piana, sferica, parabolica o altro. Avremo quindi diottri piani, sferici ecc.

In fig. 4a è rappresentato un diottro sferico; la superficie sferica  $\Sigma$ , di centro C, separa due mezzi di indice di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ , con  $n_1 < n_2$ . Un asse passante per C incontra  $\Sigma$  in V, che chiameremo **vertice** del diottro. L'asse VC sia l'**asse del diottro**.



Da una sorgente elementare posta in S, sull'asse del diottro, escono tanti raggi in direzioni diverse. Essi intersecano  $\Sigma$  ove vengono rifratti e finiscono per incrociarsi nuovamente l'asse in punti diversi Q, tanto più vicini a V quanto più è grande l'angolo con cui sono emessi da S. Essi formano un involuppo intorno all'asse noto come **caustica**.



Fanno eccezione i raggi emessi entro un conetto di apertura  $\alpha$  molto piccola, tale che il valore di  $\alpha$  in radianti coincida con  $\sin\alpha$  e  $\tan\alpha$ . Per questi raggi, che evidentemente viaggiano molto vicini all'asse (**raggi parassiali**) si può dimostrare che **convergono tutti in un unico punto Q**. Il fenomeno è detto **focalizzazione**.

Infatti, con riferimento a fig. 4b ove I ed r rappresentano angolo di incidenza ed

angolo di rifrazione di un raggio parassiale, R il raggio del diottro e p e q, sempre in approssimazione parassiale, le distanze di S e di Q da V, possiamo scrivere:

$$\sin I = I = h/p + h/R \quad \text{e} \quad \sin r = r = h/R - h/q$$

ove abbiamo applicato la seguente convenzione: **Se S è a sinistra di V, la distanza p di S da V è positiva.- Se Q è a destra di V la distanza q da V è positiva. Se C è a destra di V, R è positivo. h si assume positivo verso l'alto.**

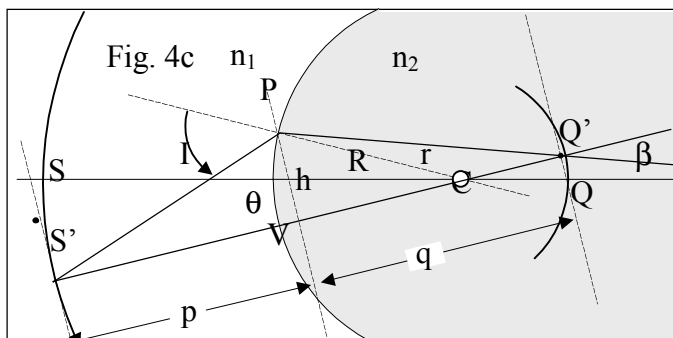
Allora, applicando la legge della rifrazione  $n_1 \sin I = n_2 \sin R$ , si ottiene:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{(equazione del diottro sferico)}$$

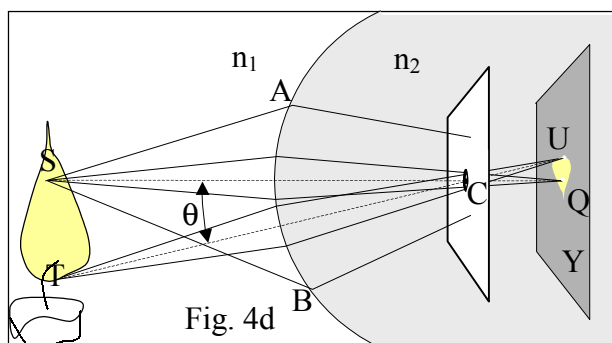
ove è evidente che valore di q che si ottiene per un dato p è indipendente da  $\alpha$ .

Immaginiamo ora di ruotare la costruzione geometrica di fig. 4b di un piccolo angolo  $\theta$  intorno al centro C del diottro (fig. 4c). S si sposta in S', Q in Q', ed è evidente che per raggi che viaggiano molto vicini all'asse S'Q' deve valere la stessa relazione che coniugava S con Q attraverso l'equazione del diottro.

Q e Q' costituiscono **immagini parassiali** di S ed S'. Questo linguaggio deriva dalle seguenti considerazioni: Sappiamo che se S costituisce una sorgente elementare i raggi che S



emette in direzione del diottro convergono in una caustica nell'intorno di Q. Questa caustica si può eliminare (Fig. 4d) ponendo in C un diaframma D, cioè uno schermo che intercetta i raggi emessi da S a grande angolo rispetto all'asse SQ come SA ed SB ma lascia passare attraverso un foro che contorna C i raggi parassiali, che convergono in Q.



Se intercettiamo questi raggi con uno schermo Y perpendicolare all'asse passante per Q, vedremo apparire su Y l'immagine nitida e viva della fiamma della candela. Essa si può considerare costituita da tanti punti luminosi, immagini parassiali di sorgenti elementari distribuite sulla fiamma della candela, come sono ad esempio Q ed U, immagini parassiali di S e T in fig. 4d. Queste immagini parassiali di sorgenti elementari

vanno a formare l'immagine della candela perché si formano nei punti in cui i raggi passanti per C (tratteggiati in fig. 4d) intersecano Y disponendosi ordinatamente su di esso. Di conseguenza l'immagine appare rovesciata.

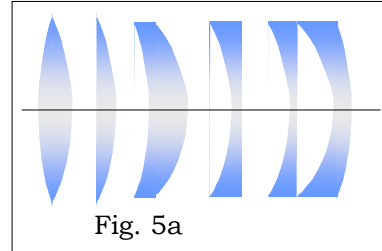
Consideriamo ora (Fig. 4c) le calotte sferiche sulle quali giacciono coppie di punti oggetto-immagine parassiale, quindi coniugati dalla equazione del diottro. La relazione oggetto-immagine è univocamente determinata (vedi ad esempio SQ ed S'Q' in fig. 4c) dalla intersezione con la calotta-immagini del raggio partente dalla calotta-sorgenti e passante per il centro C del diottro. Lo stesso si può dire, per i piani tangenti alle calotte in S e Q, relativamente ai punti contenuti entro l'areola in cui la calotta sferica si può assumere coincidente con il piano tangente.

I piani perpendicolari all'asse passanti per punti coniugati giacenti sull'asse sono detti **piano oggetti e piano immagini**. In genere, uno o più diottri i cui centri sono allineati su uno stesso asse, **l'asse ottico del sistema**, (sistemi diottatrici centrate), dato un piano oggetti si può determinare il piano immagini utilizzando le formule dell'ottica parassiale. Un fenomeno che vedremo più avanti, **la profondità di fuoco**, garantisce che sorgenti poste all'interno di un certo spazio a cavallo del piano oggetti formino immagini nitide sul piano immagini. Se così non fosse, riusciremmo a vedere immagini nitide solo di sorgenti molto vicine all'asse e giacenti su un unico piano oggetti, il che evidentemente non è vero.

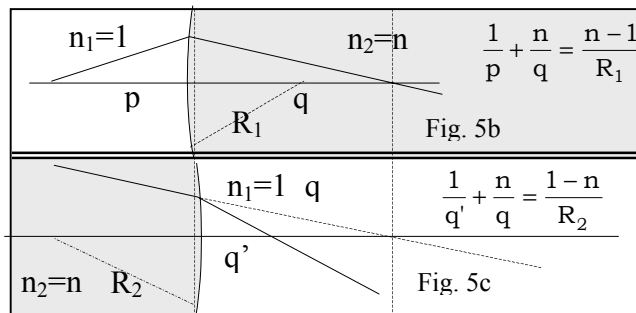
VIII.5 - LENTI SOTTILI IN APPROSSIMAZIONE PARASSIALE. FUOCHI E CENTRO OTTICO.

I diottri sferici, da soli, non costituiscono sistemi ottici di uso comune. Lo è invece il diottro piano, che si ha alla superficie di un liquido a contatto coll'aria. Se il liquido è l'acqua ( $n=1.33$ ) l'equazione del diottro per un oggetto nell'acqua a profondità  $p$  si scrive semplicemente:  $q = -p/n$  ( $R=\infty$ ). L'immagine si trova ancora nell'acqua, a profondità  $p/1.33$ .

Nelle applicazioni pratiche si usano, generalmente, combinazioni di diottri sferici coassiali. La più semplice da trattare è la lente, derivante dalla combinazione di due diottri sferici di vetro. Le lenti possono assumere forme diverse, descritte in sezione in fig. 5a e denominate rispettivamente biconvessa, piano convessa, concavo-convessa, biconcava, piano concava e ancora concavo convessa, però colla parte concava dominante sulla parte convessa. Di particolare interesse è la lente sottile, immaginata come la intersezione di due diottri di raggio molto grande con i vertici tanto ravvicinati da far somigliare la loro intersezione biconvessa ad una lenticchia. Di qui deriva, infatti, la denominazione di lente.



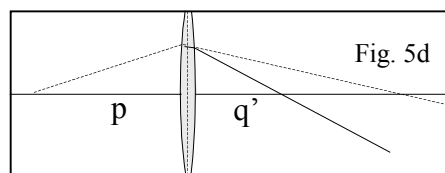
Nell'analisi delle lenti sottili si assume che il loro spessore sia nullo pur avendo i raggi dei rispettivi diottri componenti valori ben definiti. L'equazione delle lenti sottili si ottiene da due successive applicazioni della equazione del diottro, la prima per un oggetto in aria ( $n=1$ ) a distanza  $p$  dal primo diottro. La sua immagine cadrà a distanza  $q$  (Fig. 5b).



Per il secondo diottro l'immagine formata dal primo diventa l'oggetto. Detto  $R_2$  il raggio del secondo diottro, esso è per convenzione negativo. L'equazione del diottro, in cui  $q'$

rappresenta la distanza dalla lente dell'immagine finale, si scriverà come in fig. 5c ove  $q$  che  $R_2$  sono negativi. Pertanto, sommando membro a membro le due equazioni otteniamo **l'equazione delle lenti sottili**:

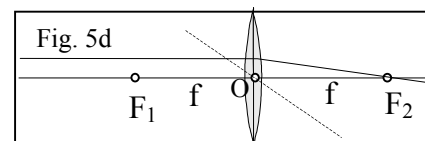
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}$$



dove  $R_1$  è il raggio del primo diottro incontrato,  $R_2$  il raggio del secondo, con segno. Si osservi che per le prime tre lenti di fig. 5a  $f$  è positivo, per le altre è negativo.

La distanza  $f$  dalla lente fornisce il punto in cui convergono raggi parassiali paralleli all'asse, sia provenienti da destra che da sinistra. E' detta **distanza focale della lente** ed individua i due **fuochi**,  $F_1$  ed  $F_2$  della lente disposti simmetricamente come in figura se  $f > 0$ .

Un ultimo punto caratterizzante le lenti sottili è il **centro ottico**, definito come quel punto attraverso il quale i raggi passano indeviati. Esso coincide colla intersezione ideale  $O$  della lente sottile coll'asse; questo perchè in quel punto la lente appare, ad un raggio incidente (tratteggiato in fig. 5d), come una lastra a facce piane e parallele che non ne muta la direzione, ed infinitamente sottile, che non lo sposta lateralmente.

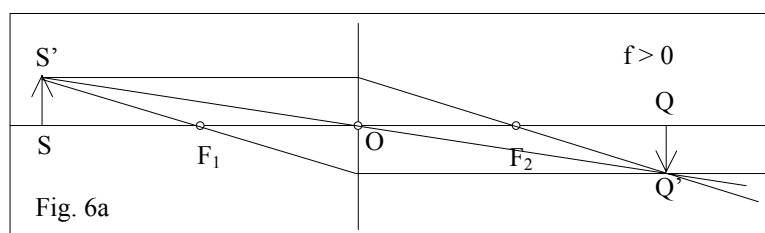


## VIII.6 - COSTRUZIONE GRAFICA DELLE IMMAGINI NELLE LENTI SOTTILI.

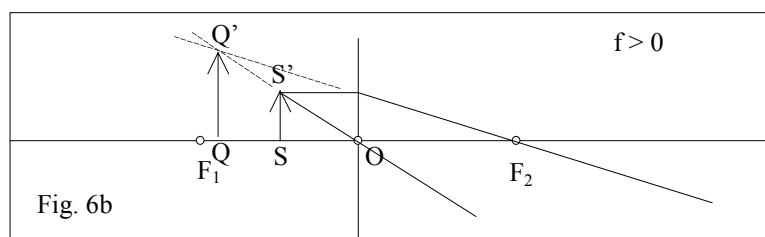
L'asse ottico, i fuochi ed il centro ottico costituiscono gli **elementi cardinali di una lente sottile**. Grazie alle loro proprietà, essi permettono di effettuare semplici costruzioni geometriche colle quali si rendono direttamente visibili e quindi immediate le proprietà parassiali degli strumenti ottici, anche se complessi.

In queste costruzioni la lente viene rappresentata con un segmento, che interseca l'asse ottico nel centro ottico. Nelle figure 6 a, b, c, d sono sintetizzate le costruzioni fondamentali riguardanti una lente sottile. In tutte queste costruzioni gli angoli e le distanze dei raggi dall'asse sono, per comodità di rappresentazione, grandi relativamente alle proprietà dei raggi utilizzate, che sono caratteristiche di raggi rigorosamente parassiali.

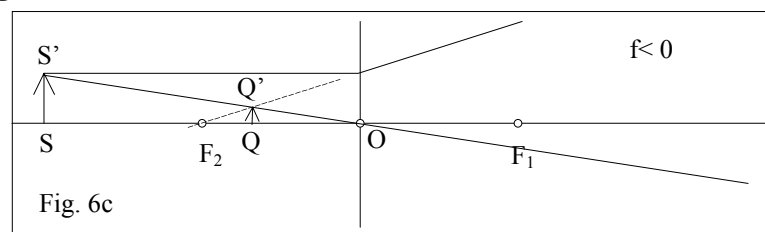
In fig. 6a  $f > 0$ . Il piano oggetti dista  $p > f$  dalla lente. Da un punto  $S'$  del piano oggetti possiamo tracciare tre raggi di cammino noto: il primo parallelo all'asse che la lente devierà su  $F_2$ , il secondo per il centro ottico ove continuerà indeviato, il terzo per  $F_1$  che la lente devierà in direzione parallela all'asse. I tre raggi convergono in  $Q'$ , **immagine reale** di  $Q$ , a distanza  $q > 0$  dalla lente.



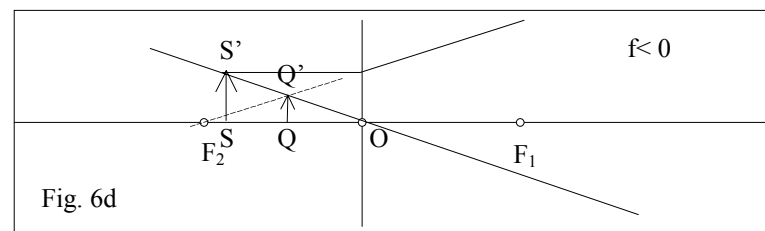
In 6b la lente è la stessa che in 6a ma il piano oggetti è posto tra il fuoco e la lente. Dei tre raggi uscenti da  $S'$  tracciati in 4a solo due intersecano la lente e chiaramente ne escono divergenti. Essi si comportano come se provenissero da  $Q'$  che viene pertanto denominata **immagine virtuale** di  $S'$ .



In 6c è rappresentata la formazione delle immagini in una lente a  $f < 0$ , quindi a fuochi invertiti. Il piano oggetti è posto oltre il punto focale ( $F_2$ ) e per un punto  $S'$  su di esso possiamo prevedere il comportamento di due soli raggi uscenti intersecanti la lente, quello parallelo all'asse, che la lente devierà come se provenisse da  $F_2$ , e quello per il centro. L'immagine  $Q'$  è virtuale e si trova tra  $F_2$  e la lente ( $q < 0$ ).



Situazione analoga si ha in fig. 6d, che differisce dalla precedente solo per la posizione del piano immagini.



L'unica lente in grado di produrre una immagine reale è evidentemente una lente ad  $f > 0$ , quando l'oggetto si trova oltre il fuoco della lente. Per questo essa è detta **convergente**, mentre le lenti ad  $f < 0$  sono dette **divergenti**. Le prime tre lenti di fig. 5a sono lenti convergenti, le ultime tre sono divergenti.

## VIII.7 - POTERE CONVERGENTE E VERGENZE.

Riprendiamo le equazioni del diottro e delle lenti sottili, che sono rispettivamente:

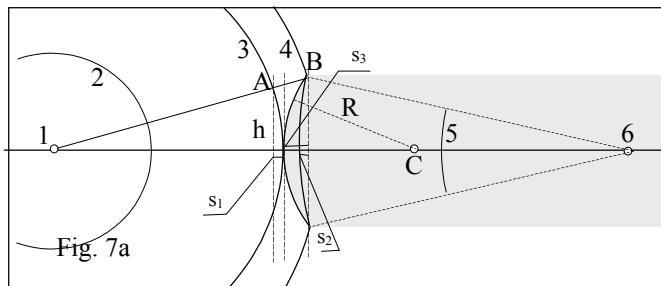
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{ed} \quad \frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{q} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

In ambedue, a secondo membro, compare una costante. Se essa è positiva, il suo inverso ha il significato di distanza focale, cioè la **distanza** dal vertice V del diottro, o dal centro O della lente, **del punto ove convergono** raggi parassiali paralleli all'asse provenienti da sinistra. Se è negativa, il suo inverso ha il significato di distanza da V o da O **del punto da cui appaiono provenire** raggi parassiali paralleli all'asse provenienti da sinistra.

Essa viene denominata **potere convergente** del diottro (o della lente) ed ha la proprietà, se più diottri sono addossati l'uno all'altro, in modo da formare una lente sottile composta, di essere uguale alla somma dei poteri convergenti dei singoli diottri componenti. Si può verificare questa proprietà ricostruendo la deduzione della equazione delle lenti sottili, costituite da due diottri addossati, ma è del tutto generale, e vale anche per più lenti addossate. Si ottiene così un semplice algoritmo per ricavare la distanza focale di una lente composta, date le caratteristiche delle lenti o dei singoli diottri componenti.

La unità di misura del potere convergente è la **diottria**, che ha dimensioni (metri)<sup>-1</sup> al pari dei rapporti del tipo n/p ed n/q, detti **vergenze**, dove n rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo in cui si propagano i raggi provenienti dal punto oggetto e diretti al punto immagine, per cui p/n e q/n rappresentano le distanze apparenti (in quanto "viste" attraverso un mezzo di indice di rifrazione n) da V (o da O per le lenti sottili) del piano oggetti e del piano immagini. Dalle equazioni del diottro e della lente è evidente che **la somma delle vergenze è eguale al potere convergente** del diottro, o di una o più lenti addossate.

Geometricamente questi rapporti rappresentano la curvatura di superfici sferiche di raggio p/n e q/n. Il modello di Huygens ci aiuta a chiarire il loro significato. Esse rappresentano infatti istanti diversi della propagazione di un fronte d'onda sferico proveniente da una sorgente (1 in fig 7a), nell'istante in cui il fronte d'onda viene a contatto col vertice del diottro (3) e nell'istante in cui esso è tutto transitato nel diottro (4), per cui proseguirà nel secondo mezzo prendendo a convergere verso il punto immagine (6). Di fatto questo è vero solo per la parte parassiale del fronte d'onda. Siano infatti l ed n gli indici di rifrazione del primo e del secondo mezzo. In approssimazione parassiale, se il diottro ed i fronti d'onda sono sferici, possiamo assumere AB come la somma delle sagitte s<sub>1</sub> + s<sub>3</sub>, dove s<sub>1</sub> = h<sup>2</sup>/2p, s<sub>3</sub> = h<sup>2</sup>/2R. Per percorrere il tratto AB il fronte d'onda impiegherà il tempo Δt = (s<sub>1</sub> + s<sub>3</sub>)/c.



Nello stesso tempo Δt la porzione di fronte d'onda che è entrata nel diottro attraverso il vertice avrà percorso, con velocità c/n, un tratto lungo l'asse eguale alla differenza di sagitte s<sub>3</sub>-s<sub>2</sub>, con s<sub>2</sub> = h<sup>2</sup>/2q. Avremo dunque la relazione:

$$\Delta t = \frac{h^2}{2Rc} + \frac{h^2}{2pc} = \frac{nh^2}{2Rc} - \frac{nh^2}{2qc}$$

che ci restituisce, fatte le ovvie semplificazioni, l'equazione del diottro!

Si osservi che i raggi che vanno a formare l'immagine parassiale impiegano tutti, pur percorrendo cammini diversi, lo stesso tempo.



VIII.8 - CAMMINO OTTICO. PRINCIPIO DI FERMAT.

Al paragrafo precedente abbiamo osservato che i raggi che formano una immagine parassiale descrivono cammini diversi lungo i quali però la luce impiega lo stesso tempo per andare dal punto oggetto al punto immagine.

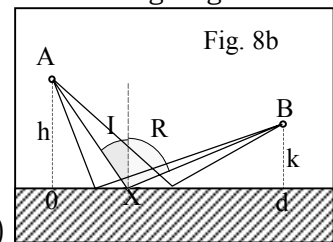
Questa proprietà va inquadrata in un principio generale, il **principio di Fermat**, secondo il quale per andare da un punto A ad un punto B la luce sceglie sempre cammini lungo i quali il cammino ottico è stazionario.

La definizione di **cammino ottico** è la seguente: dati più mezzi (e.g. tre mezzi di indice di rifrazione  $n_1, n_2, n_3$ ) supponiamo che la luce descriva nel primo un cammino  $l_1$ , nel secondo  $l_2$  e nel terzo  $l_3$ . Il tempo impiegato per percorrere il cammino  $l_1+l_2+l_3$  sarà:  $\Delta t = n_1 l_1 / c + n_2 l_2 / c + n_3 l_3 / c$ . Di qui si ricava:

$$c\Delta t = n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = U$$

che definiamo cammino ottico corrispondente al cammino  $l_1+l_2+l_3$  nei tre mezzi.  $U = c\Delta t$  rappresenta, evidentemente, la distanza che la luce avrebbe percorso nel vuoto nello stesso tempo  $\Delta t$ .

Veniamo ora al principio di Fermat, e con esso dimostriamo la legge della riflessione. In Fig. 8b sono riportati due punti A e B e tre (tra gli infiniti) cammini che congiungono A a B attraverso una riflessione su una superficie piana. Essi sono individuati dal punto di incidenza X di coordinata x.



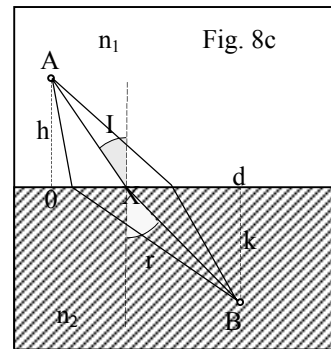
Il cammino ottico di uno qualunque di essi è  $U = n(AX + XB)$ .

Ma  $AX = \sqrt{h^2 + x^2}$ ,  $XB = \sqrt{k^2 + (d - x)^2}$  per cui

$$dU = n \cdot d(AX + XB) = n \cdot \left( \frac{2x}{2\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{2(d - x)}{2\sqrt{k^2 + (d - x)^2}} \right) = n \cdot (\sin I - \sin R)$$

Segue che se dev'essere  $dU=0$  (principio di Fermat) dev'essere  $I=R$ .

Analogamente si può procedere per dimostrare la legge della rifrazione. Infatti in fig. 8c sono riportati due punti A e B in due mezzi di indice di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ , separati da una superficie piana dove avviene la rifrazione. Vi sono tracciati tre (degli infiniti) cammini che li congiungono, individuati dal punto di incidenza X di coordinata x. Il cammino ottico di uno qualunque di essi è  $U = n_1 AX + n_2 XB$ .

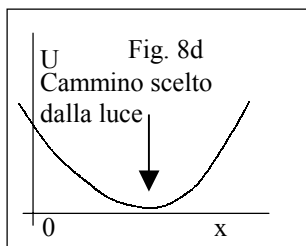


Ma  $AX = \sqrt{h^2 + x^2}$ ,  $XB = \sqrt{k^2 + (d - x)^2}$  per cui

$$dU = \left( \frac{n_1 2x}{2\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{n_2 2(d - x)}{2\sqrt{k^2 + (d - x)^2}} \right) dx = (n_1 \sin I - n_2 \sin R) dx$$

Segue che se dev'essere  $dU=0$  (principio di Fermat) dev'essere  $n_1 \sin I = n_2 \sin R$ .

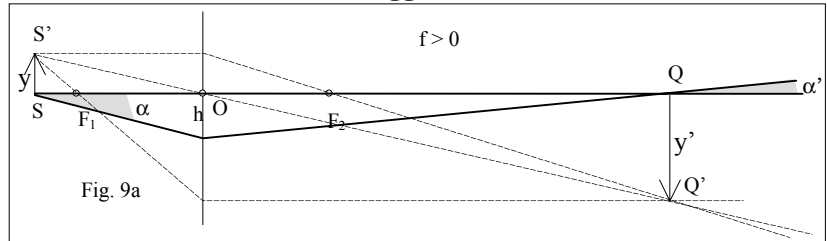
In genere (fig. 8d) al cammino scelto dalla luce corrisponde un minimo nel diagramma di U. Nel caso della lente, il cammino ottico dei raggi parassiali è addirittura costante. Se la luce ha frequenza  $\nu$  e nel punto oggetto ha fase  $\Phi$ , essa convergerà nel punto immagine con fase  $\Phi' = \Phi + 2\pi(U/c)\nu$ .



VIII.9 - INVARIANTI OTTICI. BRILLANZA.

In fig. 9a è rappresentata la costruzione dell'immagine parassiale di un oggetto S posto sull'asse di una lente convergente. Incidentalmente si osservi come per individuare Q colla costruzione geometrica, si sia dovuto ricorrere ad un oggetto esteso SS'.

A parte questo dettaglio, si è poi tracciato un raggio parassiale uscente da S formante un angolo  $\alpha$  coll'asse. La lente lo devia in Q dove forma un angolo  $\alpha'$  coll'asse.



Osserviamo ora che detti p e q le distanze del punto oggetto e punto immagine da O,

si può scrivere:

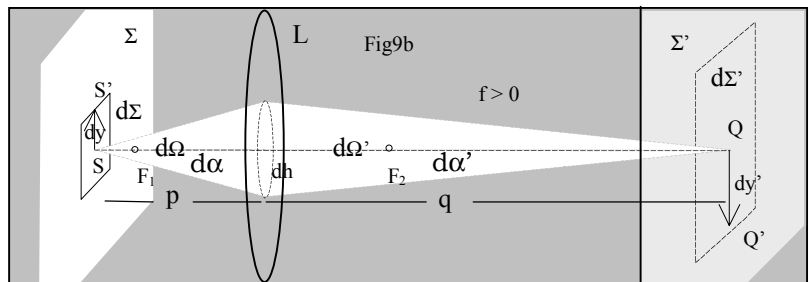
$$\frac{y'}{y} = \frac{q}{p} = \frac{qh}{ph} = \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha}$$

Questa relazione costituisce un caso particolare di una relazione più generale, nota come **invariante di Helmholtz Lagrange**, valida per l'oggetto e per ogni sua immagine prodotta da una serie di diottri sferici costituenti un sistema ottico. Con ovvio significato dei simboli essa si scrive:

$$n_1 \cdot y_1 \cdot \tan \alpha_1 = n_2 \cdot y_2 \cdot \tan \alpha_2 = n_3 \cdot y_3 \cdot \tan \alpha_3 = \text{costante.}$$

Grosso modo essa significa che nella formazione di una immagine quanto si guadagna in ingrandimento si perde in angolo della luce che vi converge, e viceversa. Ne deriva una conseguenza importante.

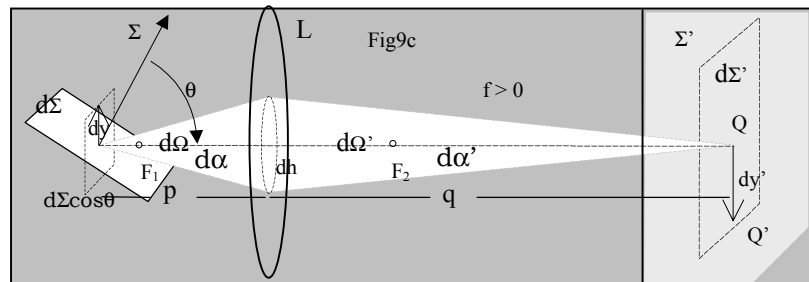
Consideriamo fig. 9b, ove è evidenziato un elemento di superficie  $d\Sigma$  di una sorgente di lato  $2dy$  centrato su S. Esso viene "osservato" con una lente che ne produce l'immagine  $d\Sigma'$ , reale, di lato  $2dy'$ , centrata su Q.



Della luce emessa da  $d\Sigma$  isoliamo (ad esempio con un diaframma) quella che viaggia entro il cono dell'angolo solido infinitesimo  $d\Omega = \pi d\alpha^2$ , luce che la lente fa convergere sotto l'angolo solido  $d\Omega' = \pi d\alpha'^2$  sull'immagine  $d\Sigma'$ .

Si osservi ora che se si quadrano i due membri della relazione di H.L. per la lente, si ottiene  $dy^2 \tan^2 \alpha \approx dy^2 d\alpha^2 \approx dy'^2 d\alpha'^2 \approx dy'^2 \tan^2 \alpha'$  che riscriviamo  $d\Sigma d\Omega \approx d\Sigma' d\Omega'$ . Pertanto, se indichiamo con B il flusso di radiazione luminosa emesso per unità di superficie ed unità di angolo solido da  $d\Sigma$ , il flusso  $d\Phi$  emesso da  $d\Sigma$  entro  $d\Omega$  sarà  $B d\Sigma d\Omega \approx B d\Sigma' d\Omega'$  flusso che converge su  $d\Sigma'$  entro  $d\Omega'$ ,

Più in generale, se  $d\Sigma$  (Fig. 9c) non giace in un piano perpendicolare alla direzione da cui è osservata, il



flusso convergente su  $d\Sigma'$  entro  $d\Omega'$  sarà il flusso proveniente da  $d\Sigma \cos \theta$ , con  $\theta$  angolo tra la normale a  $d\Sigma$  e la direzione di osservazione. Avremo quindi:

$$d\Phi = B d\Sigma \cos\theta d\Omega = B d\Sigma' d\Omega'$$

Integrando su tutta la superficie della sorgente e su tutto l'angolo solido entro il quale la sorgente invia luce nella lente che ne produce l'immagine, si ottiene la seguente relazione, che esprime l'eguaglianza del flusso inviato verso la lente col flusso che va a formare l'immagine:

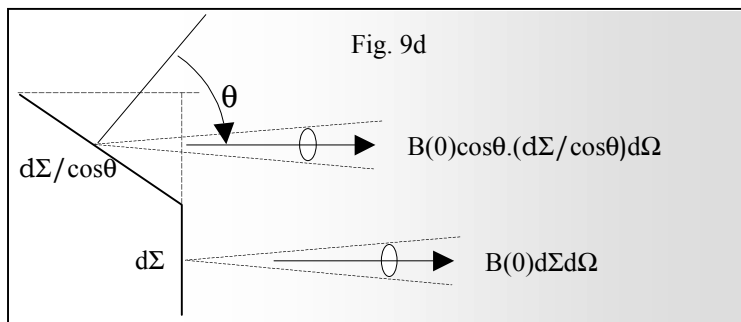
$$\Phi_{\text{sorgente}} = \int_{\Omega} \int_{\Sigma} B d\Sigma \cos\theta d\Omega = \int_{\Omega'} \int_{\Sigma'} B d\Sigma' d\Omega' = \Phi_{\text{immagine}}$$

Succede spesso che la lente sia diaframmata e che il foro del diaframma sia visto praticamente sotto lo stesso angolo solido  $\Omega$  da un punto qualunque dell'oggetto, e sotto lo stesso angolo solido  $\Omega'$  da un qualunque punto dell'immagine. Se questa approssimazione è valida, e B si può assumere costante su tutta la superficie dell'oggetto, allora l'eguaglianza dei flussi viene espressa semplicemente come:

$$\Phi = B \Sigma \cos\theta \Omega = B \Sigma' \Omega'$$

B è una proprietà intrinseca della sorgente, è detta **brillanza**. Per quanto detto ha le dimensioni di flusso di radiazione luminosa.  $\text{st}^{-1}\text{m}^{-2}$ . Si definisce come **flusso per unità di angolo solido e per unità di superficie apparente all'osservatore, cioè per unità di superficie proiettata sul piano perpendicolare alla direzione dell'asse del sistema ottico che produce l'immagine**.

Per molte sorgenti la brillantezza varia colla direzione. Per le **sorgenti dette Lambertiane** si ha  $B(\theta) = B(0)\cos\theta$  massima in direzione perpendicolare alla superficie della sorgente, e decresce come  $\cos\theta$ , il coseno dell'angolo rispetto alla normale alla superficie.



Se si osservano queste sorgenti (Fig. 9d) da una certa direzione, comunque siano inclinate le loro superfici rispetto alla direzione di osservazione, il flusso da esse emesso in quella direzione, per unità di superficie apparente e per unità di angolo solido, è costante, eguale a  $B(0)$ . E' il caso del sole e della luna. Il sole è una sorgente vera e propria, la luna diffonde la luce solare; la loro superficie è sferica e quindi è diversamente inclinata rispetto a noi che li osserviamo. Sappiamo che essi ci appaiono piatti, non sferici, e ciò deriva dal fatto che essendo sorgenti lambertiane, il flusso da essi emesso per unità di superficie apparente (quindi del disco) e per unità di angolo solido è lo stesso al centro che ai bordi.

Si definisce **illuminamento** di una superficie, in particolare di una immagine, il flusso di luce che vi giunge per unità di superficie. L'illuminamento si ottiene quindi moltiplicando la brillantezza della sorgente per l'angolo solido sotto il quale la luce converge sul piano immagini. Le unità di flusso, brillantezza ed illuminamento, nelle due versioni fotometriche ed energetiche, sono riportate in tabella. La brillantezza e l'illuminamento sono unità che si applicano a sorgenti estese, l'intensità a sorgenti puntiformi o che si possono considerare tali (e.g. una luce in lontananza).

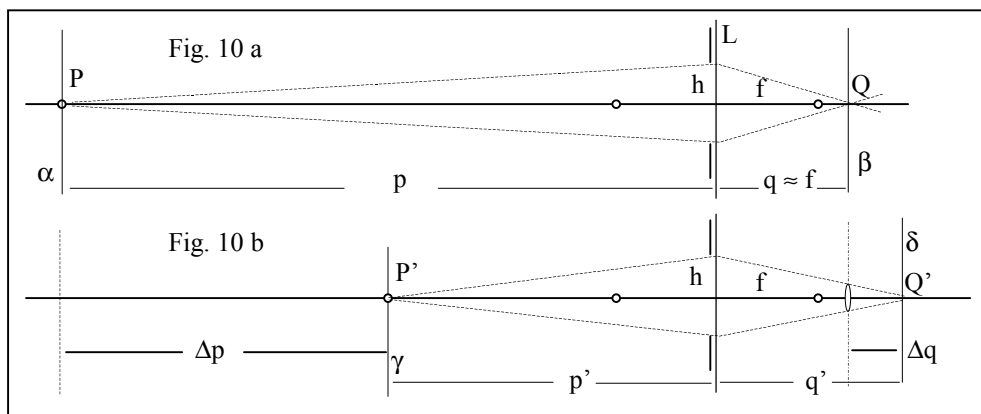
Flusso	Lumen	Watt
Brillantezza	Lumen/m <sup>2</sup> ster.	Watt/ m <sup>2</sup> ster.
Illuminamento	Lumen/m <sup>2</sup> (Lux)	Watt/ m <sup>2</sup>
Intensità (sorg. punt.)	Lumen/ster. (Candela)	Watt/ster.

### VIII.10 - PROFONDITA' DI FUOCO.

Consideriamo fig. 10a, dove una lente sottile L dotata di un diaframma h forma una immagine parassiale Q di un oggetto P sull'asse, a distanza q dalla lente.

L'ottica geometrica prevede che anche punti parassiali a P giacenti nel piano oggetti  $\alpha$  abbiano una analoga immagine sul piano immagini  $\beta$  passante per Q. L'immagine parassiale di un qualunque punto del piano oggetti si troverà sulla intersezione col piano immagini del raggio passante per il centro ottico della lente.

Diremo in breve che la lente **mette a fuoco** sul piano immagini la parte parassiale del piano oggetti. Mettendo in  $\beta$  uno schermo vedremo formarsi su di esso l'imma-



gine nitida dell'oggetto parassiale che si trova sul piano  $\alpha$ .

E' evidente che se spostiamo di  $\Delta p$  l'oggetto, (Fig.10b) esso si troverà a fuoco sul corrispondente piano immagini  $\delta$  che dista  $\Delta q$  da  $\beta$ . La relazione tra  $\Delta p$  e  $\Delta q$  si ottiene differenziando l'equazione delle lenti sottili che fornisce immediatamente  $|\Delta q| = (q^2/p^2) |\Delta p|$ .

Se però lo schermo è rimasto in  $\beta$ , ad ogni punto dell'oggetto in  $\gamma$  corrisponderà un dischetto illuminato formato dalla intersezione dello schermo con il cono di raggi proveniente ad esempio da P' che andrebbe a convergere in Q'. Quindi non ci aspettiamo di vedere sullo schermo una immagine a fuoco dell'oggetto.

Se così fosse molti strumenti ottici sarebbero inutili; a che servirebbe, ad esempio, una macchina fotografica che mettesse a fuoco, sulla pellicola, solo un piano di tutto lo spazio antistante l'obiettivo?

Per evitare questo fenomeno lo schermo sul quale vengono raccolte le immagini reali di oggetti che si trovano su piani diversi viene dotato di "granularità", nel senso che fornisce la stessa informazione visiva sia che la luce che va a formare l'immagine di un punto venga concentrata in un punto, sia che essa si distribuisca su un'areola, purchè quest'ultima non superi una certa dimensione che rappresenta, appunto, la granularità dello schermo.

Questo linguaggio è mutuato dal linguaggio che si usa in fotografia, ove l'emulsione fotografica, sulla quale viene fissata l'immagine dell'oggetto fotografato, la registrazione dell'immagine avviene su dei granuli di AgBr del diametro  $d \approx 1-2 \mu$  sospesi (emulsionati) in una gelatina trasparente.

Detta d la granularità caratteristica di uno schermo, da quanto sopra si avrebbe a fuoco, a distanza p, un intervallo  $\Delta p \approx d \cdot (f/h) (p^2/q^2)$ . Ad esempio con granularità  $d = 2 \mu$ ,  $f = 50 \text{ mm}$ ,  $h = 2 \text{ mm}$ ,  $p = 10 \text{ m}$ , posto  $q \approx f$ , il che si può fare per lenti con grande potere convergente, si ottiene  $\Delta p \approx 2 \text{ m}$ .

Questa tolleranza in p è detta **profondità di fuoco**. Oltre che dalla granularità, essa dipende dall'inverso del rapporto  $2h/f$ , meglio noto come **apertura numerica della lente**, e dal quadrato della distanza del piano oggetti. E' evidente che per oggetti lontani dalla lente la profondità di fuoco non è critica, mentre lo è per un proiettore da diapositive, ove p è dell'ordine di f mentre  $q \gg f$ .

## VIII.11 - L'OCCHIO ED IL MECCANISMO DELLA VISIONE.

L'occhio umano è costituito da un bulbo sferico, del diametro di circa 20 mm, che anteriormente presenta una protuberanza di raggio circa 5 mm, la cornea.

Gli elementi focalizzanti dell'occhio sono costituiti da tre superfici sferiche, la prima costituita appunto dalla cornea che separa l'aria da un liquido trasparente di  $n \approx 1,33$ , la seconda e la terza delimitanti il cristallino, di  $n \approx 1.44$  dietro al quale ritroviamo il liquido ad  $n \approx 1,33$ .

Si tratta quindi di tre diottri molto vicini, che in prima approssimazione tratteremo come una unica lente il cui potere convergente può essere variato tra 50 e 54 diottrie. In questo modo l'occhio può mettere a fuoco, sulla parete posteriore dell'occhio, immagini di oggetti compresi tra infinito e 25 cm rispettivamente (distanza della visione distinta).

Le variazioni nel potere rifrangente sono ottenute comprimendo il cristallino con un muscolo (muscolo ciliare). Al muscolo ciliare è anche collegata l'iride, un diaframma ad apertura variabile posto immediatamente davanti al cristallino.

Sulla parete posteriore dell'occhio è situata la retina, la membrana che ne costituisce l'organo sensibile alla luce. La retina è costituita dalle terminazioni del nervo ottico, che porta al cervello le informazioni raccolte su di essa. Queste terminazioni hanno dimensioni dell'ordine dei micron, quindi l'una accanto all'altra costituiscono uno schermo sensibile dotato di granularità che fornisce all'occhio una notevole profondità di fuoco.

L'iride, con una apertura numerica variabile tra 4 e 10, contribuisce a variare la profondità di fuoco ma soprattutto serve a mantenere entro limiti ragionevoli l'illuminamento ( $B\Omega$ ) della retina variando l'angolo solido  $\Omega$  con cui la luce vi converge, da un massimo di 0.06 ( $= 1/4^2$ , visione notturna) ad un minimo di 0,01 ( $=1/10^2$ , visione in piena luce) steradiani.

La luce che forma l'immagine di un oggetto sulla retina può provenire direttamente dalla superficie dell'oggetto, sia esso sorgente di luce o diffusore della luce proveniente da una qualche sorgente (e.g. il sole e la luna). Il cervello, cui viene comunicata la presenza dell'immagine sulla retina, estrapola all'indietro i raggi che riceve localizzando così approssimativamente l'oggetto nello spazio mentre la percezione precisa delle

distanze richiede il confronto tra le immagini dei due occhi. Questo meccanismo è ingannevole, perchè i raggi che vanno a formare l'immagine retinica possono ad esempio essere stati deviati da uno specchio in modo da giungere all'occhio **come se** provenissero dal punto in cui il cervello li immagina provenire estrapolandoli all'indietro (B in fig. 11b), mentre l'oggetto reale (A) può trovarsi da tutt'altra parte.

B in fig. 11b è l'immagine virtuale di A prodotta da uno specchio piano. L'occhio umano mette dunque allo stesso livello sorgenti di luce, oggetti che diffondono luce e le loro immagini virtuali prodotte da specchi o, come sappiamo, da lenti.

Questo non è un difetto. Al contrario, la visione di oggetti attraverso le loro immagini virtuali può permetterne l'osservazione in condizioni più favorevoli. Lenti di ingrandimento, cannocchiali, telescopi e microscopi sono tutti strumenti costruiti in modo che l'occhio possa osservarvi l'immagine virtuale di oggetti troppo piccoli o troppo lontani per essere osservati in qualche dettaglio.

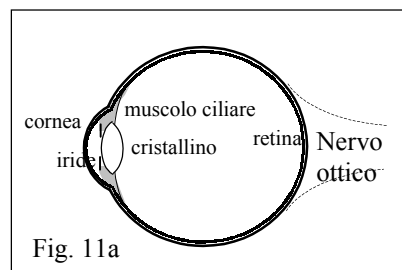


Fig. 11a

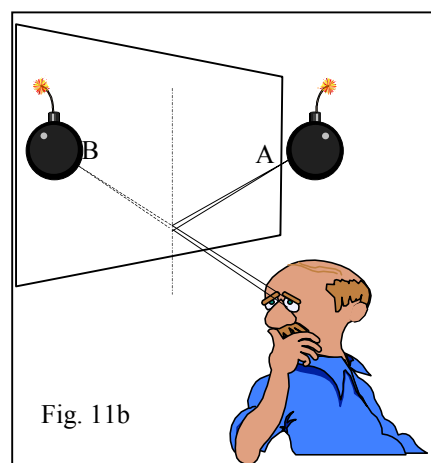


Fig. 11b

## VIII.12 - POTERE RISOLUTIVO DELL'OCCHIO.

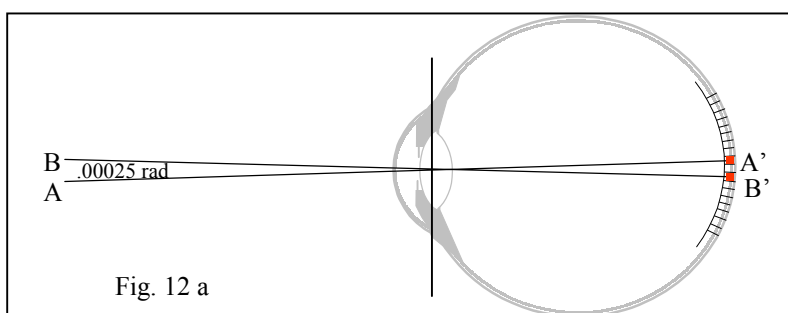
Si è già detto che l'occhio normale ha la **distanza della visione distinta** a circa 25 cm dalla cornea. Infatti l'esperienza insegna che poste due sorgenti puntiformi su un piano a 25 cm dall'occhio, l'occhio riesce a risolverle (cioè a distinguerle come separate) finchè la loro distanza non va al di sotto di 0,06 mm. Se la distanza tra le sorgenti è minore, l'occhio vede le due sorgenti come un punto solo, e lo stesso avviene allontanandole o avvicinandole all'occhio. In pratica, i più piccoli dettagli di un oggetto visibili ad occhio nudo si vedono ponendo l'oggetto a 25 cm dall'occhio.

Questo comportamento si spiega nel modo seguente.

Per essere visti separate, le immagini delle due sorgenti debbono essere messe a fuoco, sulla retina, su due elementi sensibili non contigui, quindi con almeno un elemento sensibile tra loro dove non cade luce (Fig. 12 a). Dato che gli elementi sensibili hanno un diametro dell'ordine dei  $2\ \mu$ , le immagini delle due sorgenti debbono distare, sulla retina, di almeno  $5\ \mu$ , per cui la loro separazione angolare dev'essere dell'ordine di  $5/20000 = .00025$  radianti.

A 25 cm dall'occhio, i due punti distanti 0.06 mm sono visti dal centro ottico di quest'ultimo proprio sotto un angolo di .00025 radianti. E' evidente che allontanando le sorgenti dall'occhio l'angolo sotto cui sono viste diminuisce, per cui le loro immagini finiranno per cadere su elementi contigui della retina, e non risulteranno più risolte.

Se invece le avviciniamo, l'angolo sotto il quale sono viste aumenta e, di conseguenza, si potrebbero vedere dettagli ancor più fini; senonchè sotto i 25 cm il cristallino non ce la fa più a focalizzare correttamente le immagini sulla retina, e ciò che si guadagna in angolo si perde in focalizzazione.



A questo punto la soluzione è semplice; basta aumentare il potere convergente dell'occhio giustapponendovi una lente convergente. E' quello che si fa colla lente di ingrandimento e con tutti gli strumenti ottici detti da da osservazione, che servono ad aumentare l'angolo sotto il quale due punti sono visti dal centro ottico dell'occhio. Se gli oggetti di cui vogliamo osservare al meglio i dettagli sono piccoli e vorremmo avvicinarli all'occhio, abbiamo la lente di ingrandimento ed eventualmente, il microscopio. Se gli oggetti sono lontani, per vederli sotto un angolo maggiore abbiamo il cannocchiale.

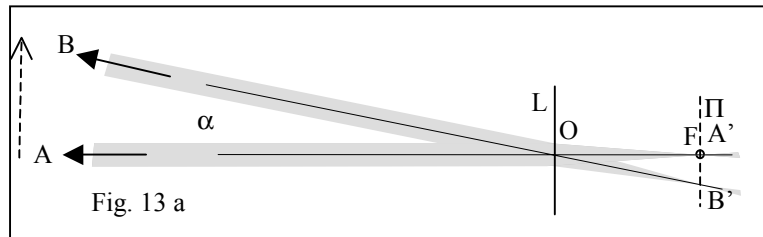
Perché madre natura non ci ha dotato di elementi sensibili più piccoli, in modo da permetterci la visione diretta di ulteriori, più fini dettagli?

La risposta sta nel fatto che la luce è costituita da onde di lunghezza d'onda  $\lambda \sim .5\ \mu$ , e che la pupilla (di diametro  $2\div 3\ \text{mm}$ ) che diaframma la luce che va a formare le due immagini A' e B' ha l'effetto di introdurre la diffrazione, cioè una incertezza in direzione dell'ordine di  $\lambda/h$ , quindi proprio dell'ordine di  $.5/2000 = .00025$  radianti. Pertanto la risposta è che la diffrazione avrebbe vanificato un tale sforzo.

VIII.13. STRUMENTI DA OSSERVAZIONE.

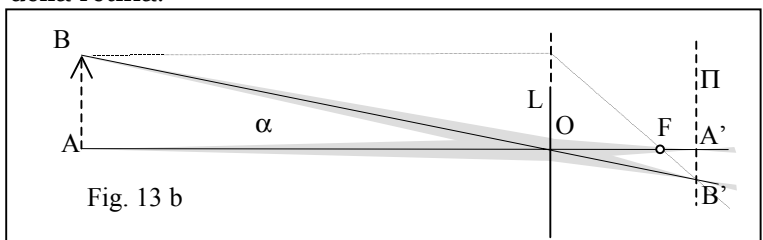
Tutti gli strumenti da osservazione producono una immagine virtuale di un oggetto reale, osservabile anche ad occhio nudo. L'occhio, rappresentato dalla lente L in fig. 13a, fa convergere sulla retina i raggi che appaiono provenire dai vari punti della immagine virtuale dell'oggetto, che in genere viene formata all'infinito o alla distanza della visione distinta.

Nel primo caso l'occhio si comporta come se osservasse un lontano panorama in quanto raccoglie, per ogni punto dell'immagine virtuale, (e.g. A e B, fig. 13a) un fascetto di raggi paralleli provenienti dalla direzione in cui quest'ultimo è



visto dal suo centro ottico. Il fascetto di raggi proveniente dal punto (A) che si trova in direzione dell'asse ottico dell'occhio convergerà sul fuoco F ( $F \equiv A'$ ) dell'occhio, mentre gli altri (e. g. B), provenienti dai punti fuori asse della immagine virtuale, convergono sul piano focale dell'occhio, nel punto (B') in cui il raggio passante per il centro ottico interseca il piano focale. In pratica assumeremo che convergano sulla intersezione del raggio passante per il centro ottico colla superficie della retina.

Lo stesso avviene se l'immagine virtuale si trova alla distanza della visione distinta. In questo caso i fascetti di luce provenienti dai vari punti della immagine virtuale saranno divergenti ma l'occhio, incur-



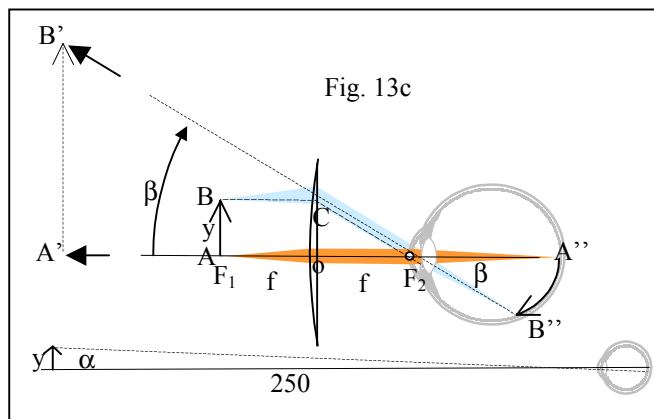
vando al massimo il cristallino, li farà ancora convergere sulla superficie Π della retina, che ora costituisce il piano immagini di un piano oggetti a 250 mm dall'occhio.

In ambedue i casi  $\alpha$  rappresenta l'angolo sotto il quale l'immagine virtuale AB è vista dal centro ottico dell'occhio.

Ciò premesso, discutiamo per primo il funzionamento dello strumento ottico più semplice, la **lente di ingrandimento**.

In Fig. 13c), in basso, è rappresentato un oggetto AB di dimensioni y mm osservato, a distanza della visione distinta, ad occhio nudo. Esso è visto sotto l'angolo  $\alpha \approx y/250$ .

Sopra, è rappresentato lo stesso occhio che osserva lo stesso oggetto AB attraverso una lente convergente di distanza focale f. L'oggetto è posto sul primo fuoco  $F_1$  della lente. I raggi uscenti da un punto qualunque di esso (e.g. B) in direzione della lente vengono da questa parallelizzati ed inviati nella direzione individuata dalla intersezione C del raggio



parallelo all'asse colla lente e dal secondo fuoco. L'occhio, ricevendo questi raggi, li fa convergere sulla retina ed, estrapolandoli all'indietro, vede accomodato all'infinito l'immagine virtuale A'B' di AB sotto l'angolo  $\beta \approx y/f$ .

L'ingrandimento si definisce come il rapporto tra l'angolo  $\beta$  sotto il quale si vede l'oggetto attraverso lo strumento ( in questo caso la lente ) e l'angolo  $\alpha$  sotto il quale lo si vedrebbe ad occhio nudo, alla distanza della visione distinta. i ha dunque:

$$I = \beta/\alpha = 250/f.$$

Si può spostare l'oggetto AB verso la lente, ottenendo così una immagine virtuale che dall'infinito si avvicina all'occhio. L'occhio riesce a metterla a fuoco sulla retina, quindi a vederla, comprimendo il cristallino, finché la distanza non diventa inferiore alla distanza della visione distinta. Se l'immagine virtuale si trova alla distanza della visione distinta l'ingrandimento della lente passa da  $250/f$  a  $(250/f) + 1$ .

Le lenti da ingrandimento non possono dare forti ingrandimenti in quanto per distanze focali molto piccole, quindi ingrandimenti oltre i  $10\times$ , diventano molto panciute, quindi si costruiscono di diametro molto piccolo, di scarso uso pratico.

A meno che le si utilizzi nel modo seguente: una prima lente, di focale dell'ordine del mm, ((in genere una lente molto raffinata, formata da molti elementi) viene posta vicino all'oggetto da osservare in modo che esso si trovi un poco oltre il primo fuoco. In questa posizione la lente ne dà una immagine reale rovesciata, ingrandita (da 10 a 100 volte!) ad una distanza che, per convenzione, si assume essere 180 mm.

L'immagine va così a formarsi nel punto ove è stato posto il primo fuoco di una seconda lente, che rispetto a tale immagine funziona da lente di ingrandimento, ne forma pertanto una immagine virtuale ulteriormente ingrandita che l'occhio può osservare accomodato all'infinito.

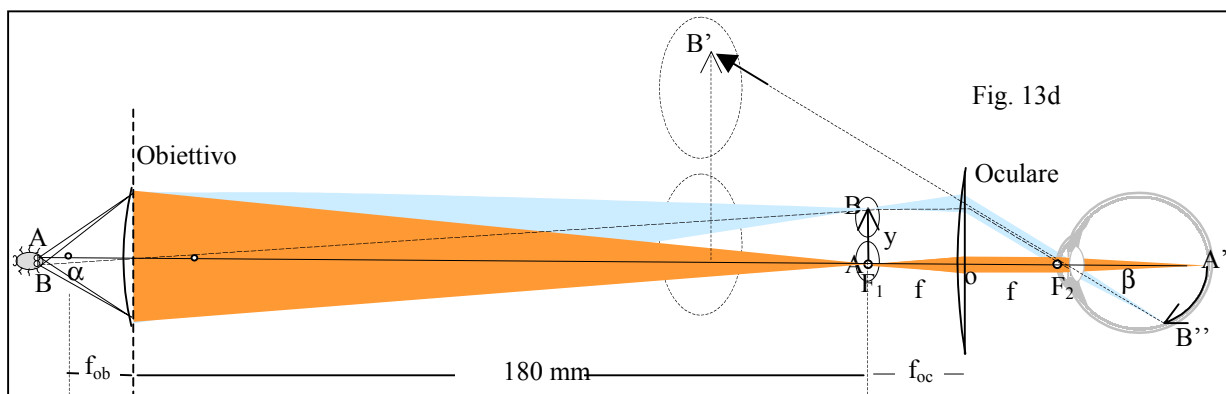


Fig. 13d

La prima lente è detta obiettivo, la seconda, che funziona da lente di ingrandimento, oculare.

L'ingrandimento è il rapporto  $I = \beta/\alpha$ , dove al solito  $\alpha$  è l'angolo sotto il quale si vedrebbe l'oggetto AB alla distanza della visione distinta. Detta  $d$  la distanza tra A e B, , si ha  $\alpha = d/250$ . L'angolo  $\beta$  è l'angolo sotto il quale è vista l'immagine virtuale di AB, quindi è  $\beta = y/f_{oculare}$ , dove  $y$  a sua volta sta a  $d$  come  $D (=180 \text{ mm})$  sta a  $f_{obiettivo}$ :  $\beta = y/f_{oc} = Dd/(f_{ob}f_{oc})$ .

In conclusione

$$I = \beta/\alpha = (250.D)/(f_{ob}f_{oc}).$$

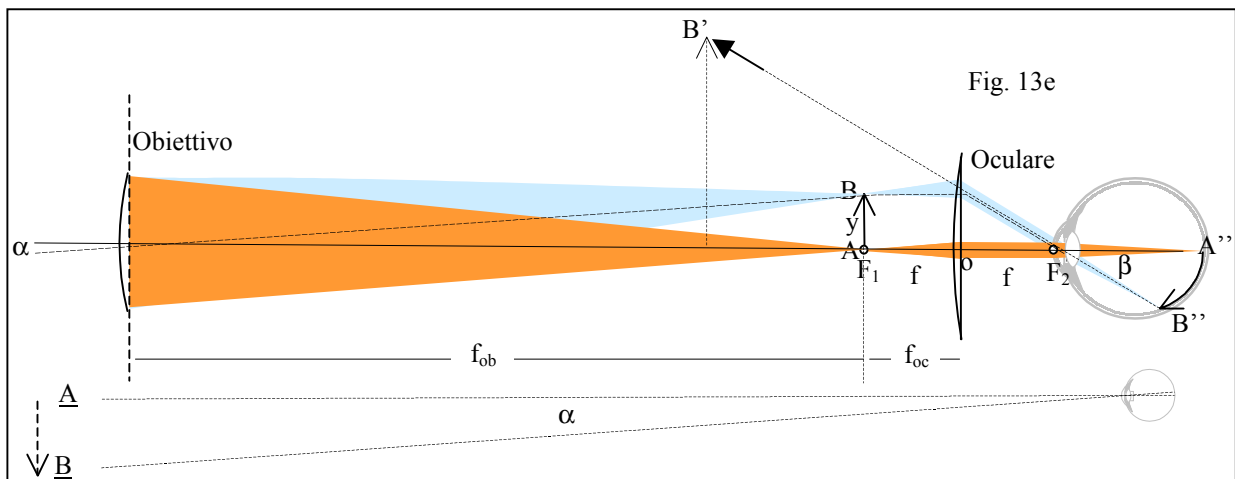
Si osservi che detta formula si può scrivere  $I = I_{ob}.I_{oc}$ . Infatti l'ingrandimento dell'oculare, coll'oggetto sul piano focale, è  $I_{oc} = 250/f_{oc}$ , mentre l'ingrandimento dell'obiettivo è il rapporto tra l'angolo sotto il quale vedrei, alla distanza della visione distinta, l'immagine dell'oggetto ingrandita dall'obiettivo e l'oggetto non ingrandito, sempre alla distanza della visione distinta, quindi  $I_{ob} = (y/250)/(d/250) = y/d \approx D/f_{ob}$ , anche detto ingrandimento visuale dell'obiettivo.



Veniamo ora al terzo strumento da osservazione, il cannocchiale Kepleriano, così detto perché progettato da Keplero già nel 1610!

Esso è rappresentato in fig. 13e. In esso vediamo ripresa l'idea dello strumento composto, in cui l'obiettivo forma una immagine reale dell'oggetto da osservare, l'oculare ne forma una immagine virtuale ingrandita, che l'occhio accomodato all'infinito può osservare sotto un angolo maggiore che ad occhio nudo.

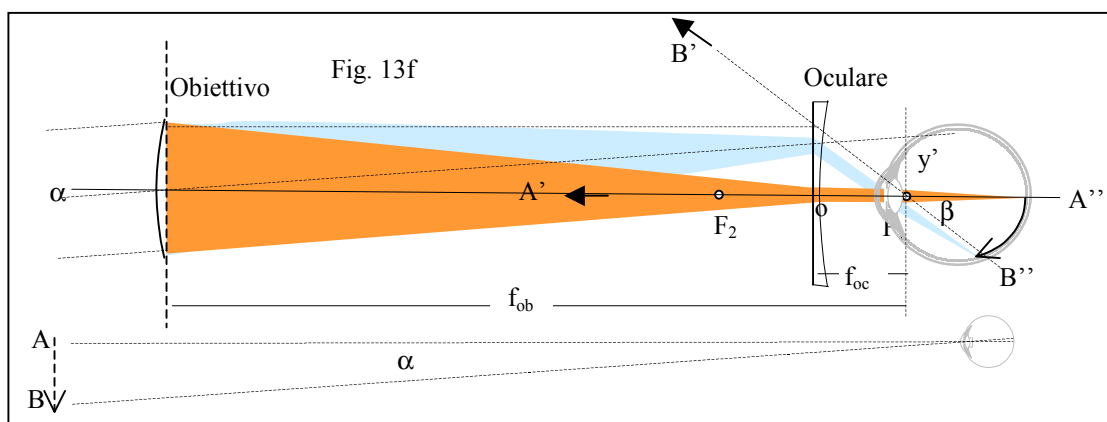
Dato che gli oggetti che si osservano col cannocchiale sono oggetti lontani, a distanza  $\gg f_{ob}$ , in fig. 13 e) si assume che essi siano a distanza infinita e che pertanto l'obiettivo ne formi l'immagine sul secondo piano focale.



L'oculare è posto in modo che il suo primo fuoco si trovi esattamente a coincidere col secondo fuoco dell'obiettivo. Dopo l'immagine reale data dall'obiettivo si ripete il meccanismo immagine virtuale-occhio.

L'ingrandimento del cannocchiale Kepleriano è  $I = \beta/\alpha = (y/f_{oc})/(y/f_{ob}) = f_{ob}/f_{oc}$  e si può anche in questo caso fattorizzare come  $I = I_{ob} \cdot I_{oc}$ .

Di altrettanto grande importanza storica è il cannocchiale con cui Galileo ha fatto le sue prime osservazioni. Anch'esso è costruito come un sistema composto di obiettivo ed oculare, col secondo fuoco dell'obiettivo coincidente col primo fuoco dell'oculare, solo che l'oculare è una lente divergente. Per il resto, dall'analisi di fig. 13f si vede che l'ingrandimento è lo stesso a parità di distanze focali.



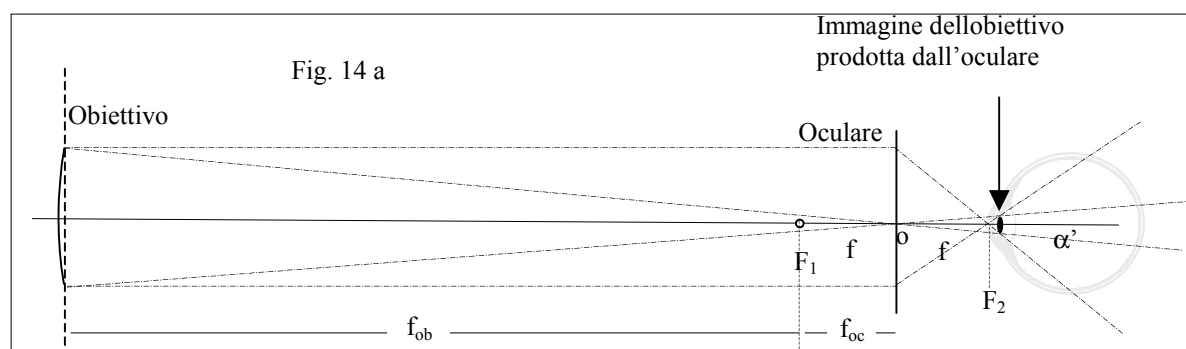
Vi è comunque una notevole differenza tra i due, che fa del cannocchiale kepleriano il cannocchiale di gran lunga più utilizzato in tutti i campi.

## VIII.12. QUALITA' DELLE IMMAGINI.

Si sarà osservato come nel cannocchiale o nel microscopio i vari elementi siano disposti in modo tale che i raggi di luce provenienti dagli oggetti osservati entrino ordinatamente nell'occhio attraverso la pupilla.

Naturalmente questo non avviene per caso. Basterebbe spostare l'occhio dell'osservatore un po' più avanti o un po' più indietro, o dare dimensioni molto più grandi all'obiettivo per scoprire raggi provenienti dall'oggetto che vengono bloccati dalla pupilla e quindi non possono contribuire alla formazione dell'immagine retinica.

Il funzionamento ottimale del cannocchiale, come per ogni altro strumento ottico, si ottiene quando tutta la luce che entra nell'obiettivo viene utilizzata per produrre l'immagine retinica. Esiste un metodo molto elegante per determinare la posizione dell'occhio per cui questo avviene, metodo descritto sommariamente in fig. 14a in cui si assume che l'obiettivo sia un oggetto che emette luce in direzione dell'oculare e si determina l'immagine dell'obiettivo prodotta dall'oculare.



Per la definizione stessa di immagine, tutta la luce uscente dall'obiettivo viene focalizzata nell'immagine, quindi se facciamo coincidere la posizione dell'iride colla posizione di questa immagine, siamo certi che tutta la luce proveniente dall'obiettivo giunge sulla retina.

Dato un oggetto molto lontano, di superficie apparente  $S$ , esso invia un flusso di luce verso l'obiettivo  $\Phi = BS\Omega$ , dove  $B$  è la brillantezza della sua superficie ed  $\Omega$  l'angolo solido sotto il quale l'obiettivo è visto da un punto baricentrale dell'oggetto.

E' evidente che aumentando il diametro dell'obiettivo si aumenta  $\Omega$ , quindi il flusso di luce entrante, ma aumentando il diametro dell'obiettivo aumenta in proporzione il diametro della sua immagine e questo può diventare tanto grande da superare il diametro dell'iride.

La condizione ottimale di funzionamento del cannocchiale si ha quando l'immagine dell'obiettivo riempie l'iride, senza superarne i bordi. In queste condizioni infatti si ha il massimo illuminamento dell'immagine che si forma sulla retina.

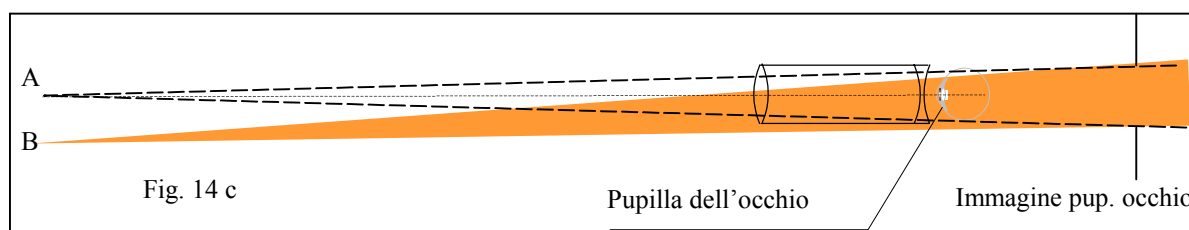
Detti  $d_{ob}$  e  $d_{pup}$  il rispettivamente i diametri dell'obiettivo e della pupilla, la condizione ottimale di funzionamento richiede  $d_{ob}/d_{pup} \approx (f_{ob}+f_{oc})/f_{oc} = I+1$ . Dato che il diametro della pupilla è fisso, dato l'ingrandimento è determinato il diametro dell'obiettivo!

In queste condizioni il prodotto  $BS\Omega = BS'\Omega'$  dove  $BS'\Omega'$  rappresenta brillantezza, superficie ed angolo solido con cui la luce converge nell'occhio a formare l'immagine ingrandita dal cannocchiale. La brillantezza dell'immagine vista al cannocchiale è, in condizioni ottimali, eguale a quella dell'oggetto. Altrimenti è minore; il rapporto tra le due,  $\leq 1$ , è detto "chiarezza" dello strumento e si può apprezzare guardando un oggetto (e.g. la luna) con un occhi direttamente, coll'altro attraverso il cannocchiale, e confrontando la brillantezza delle due immagini..

Riassumendo, l'osservazione che nel buon cannocchiale l'immagine dell'obiettivo attraverso l'oculare deve coincidere colla pupilla dell'osservatore ha spostato la nostra attenzione su quest'ultima, che costituendo l'unico elemento fisso del sistema di osservazione, condiziona in maniera determinante la sua struttura.

Queste considerazioni forniscono anche lo spunto per una generalizzazione, secondo la quale il diaframma che nello strumento di osservazione delimita l'angolo solido della luce entrante deve coincidere con l'immagine della pupilla dell'occhio attraverso il sistema di lenti che si trovano verso lo spazio oggetti. Questo è vero per il cannocchiale Kepleriano, ma non è vero per il cannocchiale galileiano.

In fig. 14 c infatti si vede che l'immagine della pupilla attraverso il cannocchiale si trova in questo caso alle spalle del cannocchiale.



Questo comporta che mentre la luce proveniente da A, sull'asse, diretta verso l'immagine della pupilla, passa tutta per l'obiettivo, quella che proviene da B, fuori asse, vi passa solo in parte. Si avrà quindi un flusso minore sull'immagine di B che sull'immagine di A perché il prodotto  $BS\Omega$  per la luce proveniente da B è minore del prodotto  $BS\Omega$  della luce proveniente da A.

Di fatto l'immagine che si osserva nel cannocchiale galileiano è uniformemente illuminata solo intorno al centro e perde luminosità verso i bordi. Questo fenomeno si chiama "vignettatura" della immagine, ed è sinonimo di una povera progettazione. In pratica la parte dell'immagine meno luminosa viene tagliata con dei diaframmi che ne fanno vedere solo la parte centrale.