

## CAPITOLO IX

### IL MODELLO ONDULATORIO DELLA LUCE

#### IX. 1 - BIRIFRANGENZA.

Fino a questo momento abbiamo assunto che la luce si propagasse nel vuoto o in mezzi trasparenti omogenei ed isotropi come l'aria, il vetro, l'acqua ecc.

Questa isotropia si riflette nel riferimento delle leggi della riflessione e della rifrazione al piano di incidenza, a sua volta definito dal raggio incidente e della normale alla superficie di separazione di due mezzi nel punto di incidenza, ma indifferente a rotazioni dei due mezzi rispetto a questo asse.

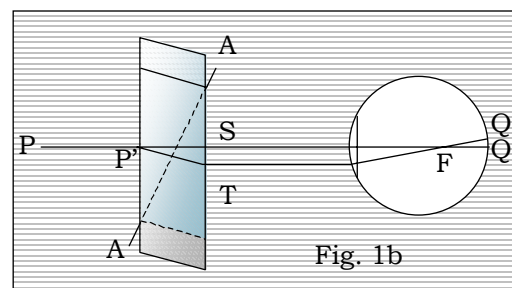
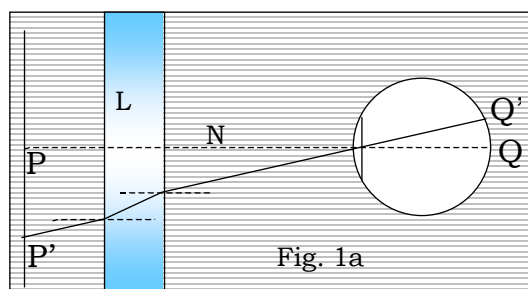
. Questa isotropia fa sì che, ad esempio, l'immagine  $Q'$  di  $P'$  (Fig. 1a) sia indifferente a rotazioni della lastra  $L$  intorno alla normale  $N$  alle sue facce.

Esistono però materiali trasparenti alla luce che non hanno le stesse caratteristiche di isotropia. Quello noto da più tempo è lo spato d'Islanda, un cristallo che si presenta naturalmente sotto forma di un parallelepipedo i cui spigoli formano, su due vertici (opposti)  $102^\circ$ , mentre sugli altri vertici ne formano  $102$  o  $78$ .

La linea ideale che unisce i due vertici i cui spigoli formano a due a due  $102^\circ$  costituisce l'asse di simmetria del cristallo. Esso è anche detto asse ottico in quanto alla sua orientazione sono legate le proprietà ottiche del cristallo stesso.

Il modo più semplice per presentare queste proprietà ottiche è di ripetere col cristallo l'esperimento della lastra di vetro. In fig. 1b, in particolare, si è avuto cura di ruotare il cristallo intorno all'asse  $PQ$  in modo che l'asse ottico  $AA$  giacesse sul piano della figura.

Guardando un oggetto in  $P$  lo si vede sdoppiato nelle due immagini  $Q$  e  $Q'$ . Ruotando la lastra intorno all'asse  $PQ$ ,  $Q$  resta fisso mentre si vede  $Q'$  ruotare intorno a  $Q$ .



Il fenomeno, detto **birifrangenza**, fu scoperto da Rasmus Bartholinus nel 1670.

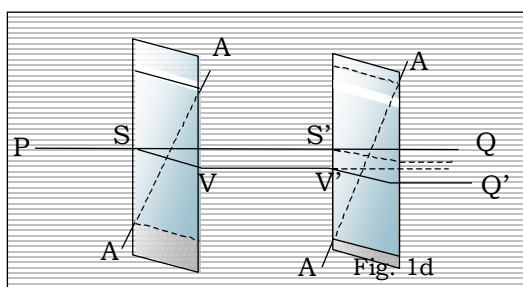
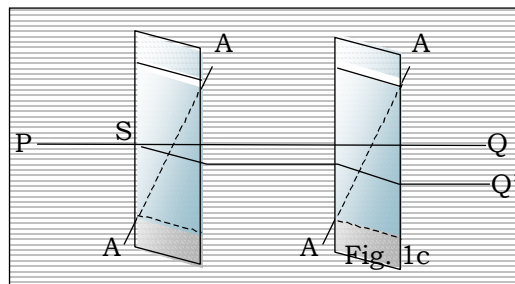
Dal disegno è evidente che il raggio  $PP'$ , penetrando nel cristallo, si sdoppia in due raggi (di pari intensità) di cui uno (**raggio ordinario**) prosegue indeviato, come previsto dalla legge della rifrazione, mentre il secondo subisce una deviazione nel piano individuato dalla direzione di incidenza e dall'asse ottico (**raggio straordinario**). Giunto in  $T$ , il raggio straordinario torna parallelo a  $PP'$  e poi, prendendo a propagarsi in mezzi omogenei ed isotropi, si comporta come il raggio ordinario, nel senso che avrà lo stesso indice di rifrazione e contribuirà all'immagine  $Q'$  di  $P$ .

Segue di qui un duplice problema:

- 1) Verificato che per il raggio ordinario vale la legge della rifrazione, trovare la legge che governa la rifrazione del raggio straordinario .
- 2) Trovare in che modo la luce che viaggia secondo  $PS$  differisce da quella che viaggia secondo  $PT$ .

Per rispondere alla prima domanda ci basiamo su un classico esperimento ( Huygens 1680 ).

Un raggio di luce incidente su un cristallo di spato d'Islanda (Fig. 1c) allo stesso modo che in fig. 1b) viene diviso in due parti di eguale intensità che proseguendo incontrano un secondo cristallo, orientato esattamente come il primo. Le deviazioni si ripetono esattamente allo stesso modo che nel primo.

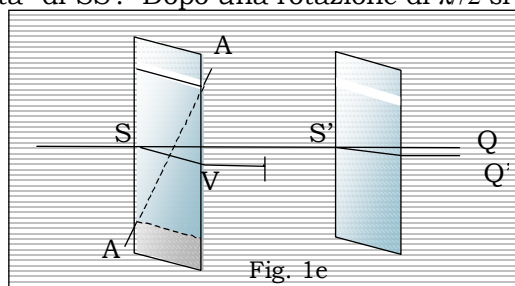


Se però prendiamo a ruotare il secondo cristallo intorno all'asse PQ, (fig. 1d) vedremo immediatamente sdoppiarsi in S' e V' i raggi SS' e VV' . Possiamo, ad esempio, schermare VV' ed osservare il solo SS' che si sdoppia dando luogo ad un nuovo raggio straordinario sempre colla regola che la somma delle intensità dei due raggi deve eguagliare l'intensità di SS'. Dopo una rotazione di  $\pi/2$  si

arriva alla estinzione di SQ (e massima intensità sull'altro raggio).

Un modello, in cui si dava una spiegazione unica del comportamento della luce, sia nei mezzi isotropi, sia nei mezzi anisotropi, fu data per la prima volta da Huygens nel 1680. Tratteremo questo modello nel prossimo paragrafo. Tutt'altro che una reliquia, esso costituisce ancora oggi lo strumento principe per costruire il cammino dei raggi di luce nei mezzi anisotropi o nel caso in cui il mezzo in cui si propaga la luce, isotropo, sia in moto rispetto all'osservatore.

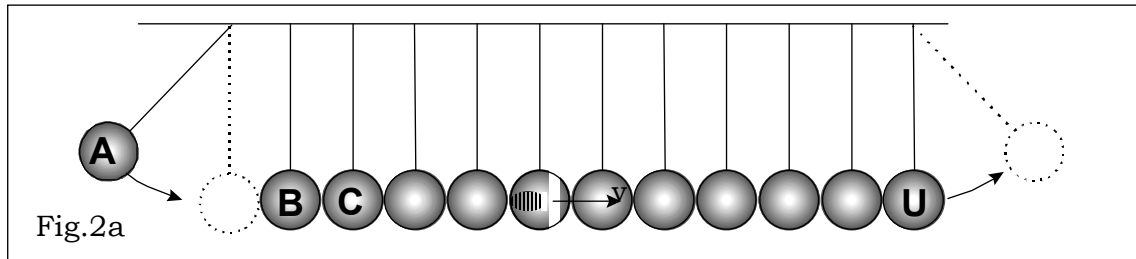
Proprio perché legato al linguaggio dei raggi di luce il modello di Huygens non rende conto dei colori, della diffrazione e dei vari fenomeni di interferenza cui essa dà luogo, ma il principio sul quale si basa è corretto sia in meccanica sia in elettromagnetismo e, riformulato da Fresnel agli inizi dell'800 (Principio di Huygens-Fresnel, o più semplicemente principio di Huygens), esso costituirà la base di partenza del modello ondulatorio della luce, che normalmente va sotto il nome di Young e Fresnel.



IX.2 - ONDE IMPULSIVE LONGITUDINALI. IL MODELLO DI HUYGENS.

Il modello impulsivo della luce, è stato sviluppato da Christian Huygens (1629-1695) ispirandosi alla propagazione di impulsi longitudinali nell'omonimo pendolo, descritto in fig. 2a.

Si tratta di una serie di pendolini appesi in fila e terminanti ciascuno in una



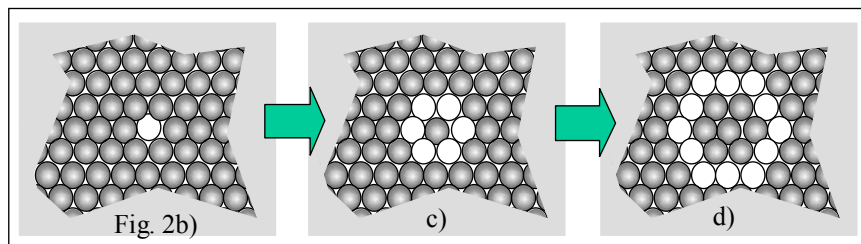
sferetta elastica a contatto con quelle del pendolo precedente e seguente.

Quando il pendolino A, lasciato cadere, urta B, ambedue restano immobili mentre, dopo un tempo  $\Delta t$  breve, ma finito, l'ultimo pendolino della fila (U) sobbalza praticamente alla stessa altezza di A per subito ricadere, seguito dopo lo stesso tempo  $\Delta t$  da un nuovo sobbalzare di A, e così via, ciclicamente.

Il fenomeno si interpreta assumendo che l'impatto di A con B produca in B una deformazione superficiale, locale e temporanea che viene trasmessa da una sferetta all'altra, fino all'ultima che viene rilanciata colla stessa velocità con cui A ha urtato B. Si tratta di una **perturbazione di tipo impulsivo**, in quanto di breve durata, e **longitudinale**, in quanto le deformazioni che essa produce avvengono nella stessa direzione in cui si propaga la perturbazione. Di fatto il sistema dei pendoli è concepito in modo da non trasmettere da una sfera all'altra impulsi trasversali. Quantità di moto ed energia portate dalla perturbazione si manifestano quando quest'ultima giunge in U o in A.

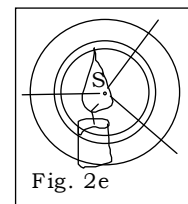
La **velocità**  $v$  di propagazione della perturbazione non dipende dalla altezza dell'impulso che si propaga mentre dipende dal materiale di cui sono fatte le sferette. Infine, facendo cadere contemporaneamente A ed U si osserva che i relativi impulsi si propagano in direzioni opposte senza che la loro sovrapposizione ne modifichi le caratteristiche. Per la propagazione di queste perturbazioni **vale** dunque il **principio di sovrapposizione**.

Mutatis mutandis, proprietà analoghe valgono per la luce. Infatti la sua velocità di propagazione dipende dal materiale in cui si propaga e non dalla intensità della luce che viaggia, e per essa vale il principio di sovrapposizione. Huygens immagina allora che lo spazio sia pieno di sferette microscopiche, perfettamente elastiche, incorporee quindi prive di massa e di attriti, ma perfettamente elastiche, un "etere". Se per una qualche ragione una di queste sferette viene eccitata (Fig. 2b), essa si diseccita trasferendo il suo stato di eccitazione alle sferette adiacenti (2c) che a loro volta lo passano alle sferette adiacenti (2d) e così via, all'infinito. Come nel pendolo, la propagazione delle onde mantiene la memoria della direzione di provenienza per cui dalla diseccitazione di una singola sferetta deriva il propagarsi di un impulso di forma sferica.



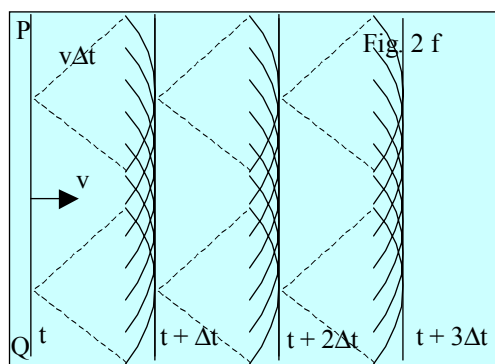
Chiameremo **fronte d'onda** l'insieme delle sferette che, in un certo istante  $t$ , vengono eccitate dal passaggio della perturbazione.

In un mezzo omogeneo ed isotropo tridimensionale avremo, come risultante di una serie di eccitazioni e successive diseccitazioni di una singola sferetta  $S$  d'etere, una serie di fronti d'onda sferici concentrici che si inseguono, allargandosi, all'infinito. Questa situazione, illustrata in fig. 2e, comporta che se i fronti d'onda emessi da  $S$  si propagano in un mezzo omogeneo ed isotropo, i raggi di luce emessi da  $S$  secondo l'ottica geometrica risultino sempre perpendicolari ai fronti d'onda di Huygens.



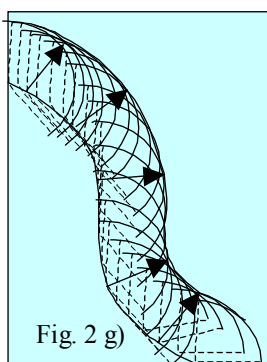
Ciò premesso, Huygens assume (**Principio di Huygens**) che data la superficie che descrive un fronte d'onda (non necessariamente sferico) in un certo istante  $t$  della sua propagazione, all'istante  $t+\Delta t$  il fronte d'onda deve coincidere con la superficie involuppo di infiniti fronti d'onda sferici immaginati prodotti in avanti all'istante  $t$  da infinite sorgenti fittizie puntiformi distribuite sul fronte d'onda quale appariva all'istante  $t$ . Ciascuno di questi fronti d'onda sferici avrà quindi raggio  $v\Delta t$ .

Un esempio della applicazione del principio di Huygens alla propagazione di un fronte d'onda piano (in un mezzo omogeneo e isotropo) è riportato in fig. 2 f). Il fronte d'onda, rappresentato all'istante  $t$  della sua propagazione è il piano (PQ) e viene costruito nella sua posizione all'istante  $t+\Delta t$  tramite l'inviluppo delle superfici sferiche centrate su alcuni punti di PQ e aventi raggio  $v\Delta t$ . Esso



risulta ancora piano come ci aspettiamo perchè il mezzo è omogeneo. La costruzione è poi applicata altre due volte, ottenendo così la posizione del fronte d'onda in quattro istanti successivi. Ricordiamo che l'inviluppo si definisce la superficie luogo dei punti in cui onde sferiche provenienti da sorgenti fittizie adiacenti hanno tangente comune.

Fronti d'onda piani significano luce parallela, come quella emessa da una sorgente puntiforme infinitamente lontana. Fig. 2f rappresenta la interpretazione ondulatoria della propagazione di un fascio di luce parallela proveniente da una sorgente puntiforme che si trova infinitamente lontano, a sinistra. I raggi di luce con cui rappresenteremmo questo fascio sarebbero perpendicolari ai fronti d'onda.



d'onda..

La costruzione di Huygens non attribuisce alcun significato alla sovrapposizione di onde fittizie nei punti in cui queste si sovrappongono senza avere tangente comune. In questo senso essa va intesa come una costruzione geometrica, al pari dell'ottica geometrica. Essa è applicata in fig. 2g) ad un fronte d'onda qualunque. I vettori, di modulo  $v\Delta t$  uniscono la sorgente al punto in cui l'onda sferica emessa entra a far parte dell'inviluppo, quindi rappresentano il cammino percorso dai corrispondenti elementi superficiali nel tempo tra l'istante  $t$  e l'istante  $t+\Delta t$  o, se vogliamo, il cammino dei corrispondenti raggi di luce, che di conseguenza risultano ancora ortogonali ai fronti

Per la verità il modello di Huygens ci dice qualcosa di più dell'ottica geometrica. Infatti esso ci permette di dimostrare le leggi della riflessione e della rifrazione, fornendoci anche l'indicazione che se  $c$  è la velocità della luce nel vuoto, e nei mezzi materiali è  $v=c/n$ , dev'essere  $n>1$ .

In fig. 2h) la costruzione di Huygens è applicata alla costruzione del fascio di luce riflessa da una superficie S sulla quale è incidente un fascio di luce parallela con angolo di incidenza I. In essa si assume che, se un fronte d'onda, nel suo cammino, incontra una superficie riflettente, le sorgenti fittizie che si vengono a trovare su detta superficie emettono onde fittizie all'indietro.

Il fronte d'onda AB dopo un tempo  $3\Delta t$  arriva in PQ col punto A in P. Nei successivi  $\Delta t$  secondi tutti i punti compresi nel tratto di fronte d'onda AB incontrano la superficie riflettente finché dopo  $\Delta t$  secondi B si trova in Q'.

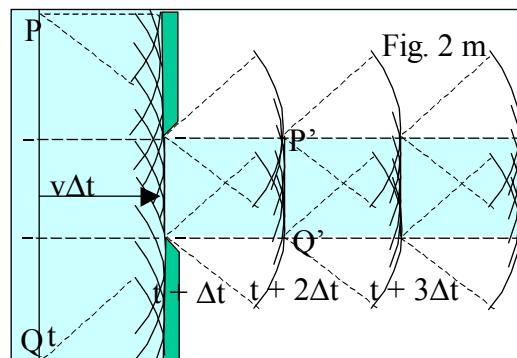
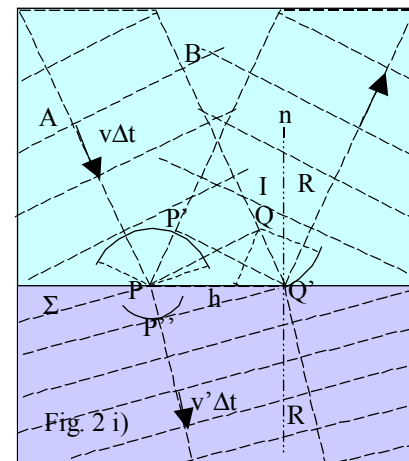
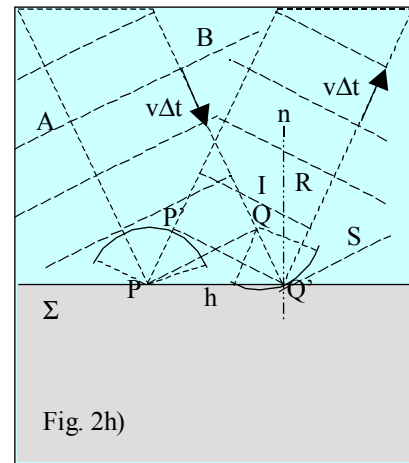
Negli stessi  $\Delta t$  secondi da P è emersa all'indietro un'onda sferica di raggio  $v\Delta t$  mentre dai punti compresi nell'intervallo h in cui i vari punti di AB si succedono nell'incontrare la superficie riflettente saranno emerse onde sferiche di raggio via via minore fino ad arrivare in Q' cui corrisponderà una superficie sferica di raggio nullo, cioè un punto. L'involuppo di queste onde individua il fronte d'onda emergente dalla superficie riflettente che corrisponde ad AB dopo  $4\Delta t$  secondi. Esso coincide con P'Q' che, se la direzione di incidenza di AB era data dall'angolo di incidenza I, emerge propagandosi secondo l'angolo  $R=I$ .

Anche la legge della rifrazione è contenuta nella costruzione di Huygens. Per dimostrarlo consideriamo fig. 2i), dove è rappresentata la propagazione dello stesso fronte d'onda AB di fig. 2h) colla variante che alla superficie di separazione tra i due mezzi oltre alla riflessione ha luogo una trasmissione del fronte d'onda, però con velocità  $v'$  che assumiamo arbitrariamente  $< v$ .

Il fronte d'onda PQ attraversa la superficie di separazione tra i due mezzi nei  $\Delta t$  secondi successivi all'istante in cui P incontra la superficie.

In questi  $\Delta t$  secondi sarà passata tutta la porzione di fronte d'onda PQ per cui Q si troverà in Q'. L'involuppo delle onde emesse in questa fase sarà P'Q' che chiaramente si propaga in una direzione che forma l'angolo R colla normale  $n$  alla superficie. Dalla geometria è poi evidente che  $h \sin I = v\Delta t$  e che  $h \sin R = v'\Delta t$  da cui dividendo membro a membro si ricava:  $\sin I / \sin R = v / v'$ . Indicati con  $c$  la velocità della luce nel vuoto, con  $n$  ed  $n'$  gli indici di rifrazione dei due mezzi e con  $v=c/n$  e  $v'=c/n'$ , per  $v < v'$  dev'essere  $n' > n$ , per cui quando la luce passa da un mezzo meno rifrangente ad uno più rifrangente ( $n' > n$ ) la sua velocità diminuisce e cambia direzione avvicinandosi alla normale nel punto di incidenza.

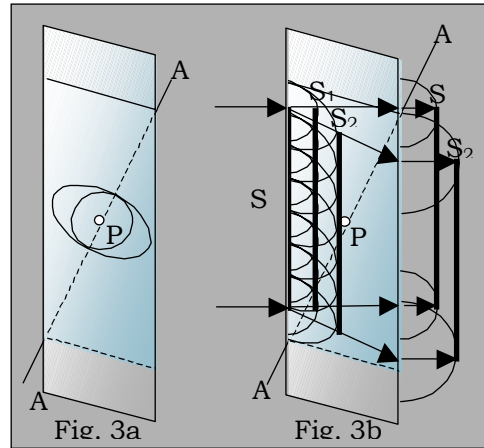
In fig. 2m infine è rappresentata la predizione del modello di Huygens per un fascio di luce parallela incidente su una apertura. Essa è identica a quella dell'ottica geometrica. Non prevede la diffrazione.



### IX.3 - BIRIFRANGENZA E MODELLO DI HUYGENS.

Applichiamo ora il modello di Huygens alla propagazione della luce nei mezzi anisotropi. Secondo Huygens, una qualunque sorgente (vera o fittizia) interna ad un mezzo birifrangente emette due onde,

- una sferica, propagatesi con velocità  $c/n_o$ , ( $n_o$ =indice di rifrazione del raggio ordinario) il cui involuppo permette di predire la propagazione del raggio ordinario,
- una ellissoidale, che solo nella direzione dell'asse ottico si propaga colla stessa velocità  $c/n_o$  del raggio ordinario. Se P rappresenta una tale sorgente in un cristallo di spato d'Islanda, dopo un tempo  $\Delta t$  da P saranno emersi due fronti d'onda come rappresentato in fig. 3a.



Un fronte d'onda piano S che all'istante  $t_1$  investa perpendicolarmente una faccia del cristallo (fig. 3b), all'istante  $t_2 = t_1 + \Delta t$  avrà creato i due involuppi  $S_1$  ed  $S_2$  dove  $S_2$  viaggia più rapidamente di  $S_1$  per cui raggiungerà per primo la faccia posteriore del cristallo. Da quel momento in poi tornerà a viaggiare in un mezzo omogeneo e isotropo, per cui riprenderà a viaggiare parallelo alla direzione di incidenza di S. Sarà inseguito da  $S_1$ , che invece è passato indeviato attraverso il cristallo.

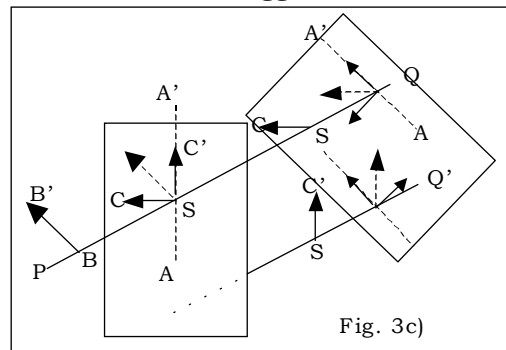
E' evidente che la conoscenza dell'ellissoide delle velocità è essenziale per costruire la direzione del raggio straordinario rifratto. Viceversa, l'ellissoide delle velocità si può determinare sperimentalmente, studiando il comportamento del raggio straordinario; il primo fu misurato appunto da Huygens, per lo spato d'Islanda.

Va inoltre osservato che mentre il raggio ordinario è ancora perpendicolare ai fronti d'onda di Huygens, il raggio straordinario non lo è.

Malgrado questi brillanti risultati, il modello di Huygens fu praticamente demolito da Newton secondo il quale un'onda longitudinale, per sua natura simmetrica intorno alla sua direzione di propagazione, non poteva risentire in due modi diversi delle anomalie del mezzo che attraversava. Secondo Newton, gli studi di Huygens dimostravano che la luce che passava dal primo al secondo cristallo, nella esperienza di Huyens, aveva perso la sua caratteristica simmetria intorno alla direzione della propagazione. Newton diceva "light has sides", la luce ha fianchi, noi oggi diciamo che la luce che passa da un cristallo all'altro è polarizzata rettilineamente.

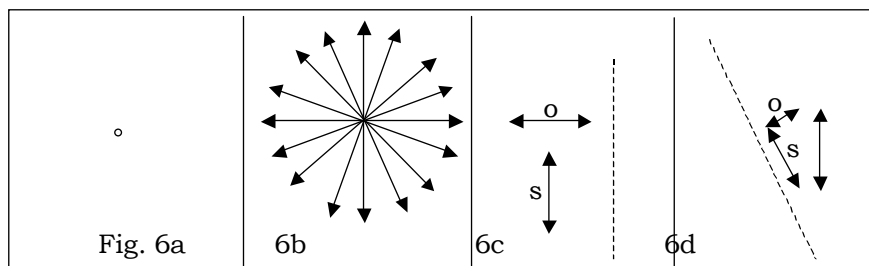
L'ostacolo verrà brillantemente superato un secolo dopo, assumendo che la luce polarizzata rettilineamente sia un'onda sinusoidale che vibra perpendicolarmente alla sua direzione di propagazione.

Così (Fig. 3c) un raggio PS di luce polarizzata, che vibra secondo  $BB'$  (e incide perpendicolarmente sulla solita faccia del cristallo sulla quale, tratteggiata, è anche visibile la proiezione  $AA'$  dell'asse ottico), quando esce dal cristallo si trova scomposto nei due raggi paralleli (ordinario e straordinario)  $SQ$  ed  $SQ'$ . Il primo vibra in direzione  $SC$ , perpendicolare all'asse ottico. Il secondo vibra perpendicolarmente al primo.



Se i due raggi raggiungono un secondo cristallo coll'asse ottico ruotato rispetto al primo avviene una ulteriore decomposizione dei due raggi. L'intensità di uno qualunque di questi passa da un valore massimo,  $I_0$ , a zero per una rotazione di  $90^\circ$  della seconda lastra. Posto  $I=I_0$  per  $\alpha=0$ , si trova ovviamente  $I=I_0\cos^2\alpha$  (Legge di Malus).

Abbiamo dunque una nuova immagine per un raggio di luce. Si passa dalla linea, che in un piano ad essa perpendicolare ha per immagine un punto, (Fig. 6a) ad una raggiera centrata su



quel punto (Fig. 5b), immagine di tutta una serie di vibrazioni che avvengono trasversalmente al raggio, di ampiezza confrontabile, distribuite uniformemente intorno alla sua direzione di propagazione. Si tratta, chiaramente, di un raggio non polarizzato.

Entrato in un mezzo anisotropo, il cui asse ottico è tratteggiato in fig. 6c, ciascuna delle componenti del raggio non polarizzato si divide in due componenti una perpendicolare all'asse ottico, l'altra parallela. Queste componenti, sommandosi, danno luogo a due raggi di eguale ampiezza (e quindi eguale intensità); il raggio ordinario ed il raggio straordinario.

Raggio ordinario e raggio straordinario sono polarizzati. Quindi quando entrano in un secondo mezzo (fig. 6d per il raggio straordinario di fig. 6c), si scompongono in due componenti di cui una vibra perpendicolarmente al nuovo asse ottico, e si comporta da raggio ordinario, mentre l'altra si comporta da raggio straordinario.

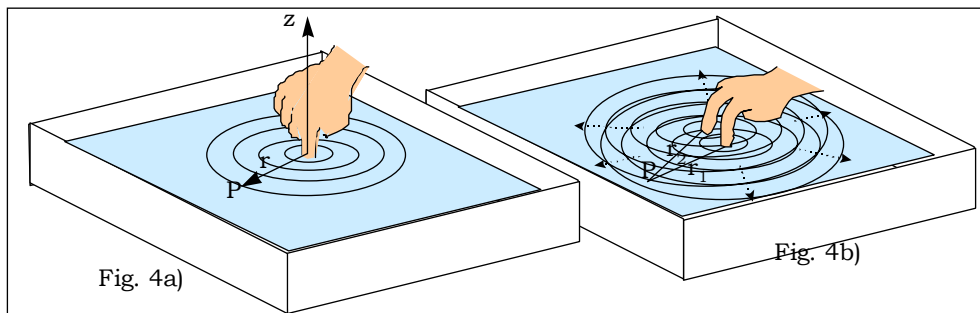
Si osservi che, in assenza di asse ottico, quindi in un mezzo isotropo, un raggio di luce polarizzata non si divide in raggio straordinario e raggio ordinario, e si comporta come un raggio ordinario. A maggior ragione, si comporta come raggio ordinario anche il raggio non polarizzato di fig. 6b, perché così si comporta ogni sua componente.

In genere, il piano definito dalla direzione della propagazione e dalla direzione di vibrazione di un raggio polarizzato rettilineamente viene detto piano di vibrazione e corrisponde al piano in cui vibra il campo elettrico  $\mathbf{E}$ , mentre il piano ortogonale ad esso viene detto piano di polarizzazione del raggio.

Nel paragrafo seguente analizzeremo il problema della sovrapposizione di due onde sinusoidali aventi la stessa pulsazione, la stessa ampiezza e la stessa direzione di vibrazione, nella fattispecie trasversale alla direzione del moto. Il problema è propedeutico alla interpretazione dei fenomeni che avvengono in alcuni casi in cui la luce si sovrappone dando luogo a frange alternativamente brillanti e oscure, spesso colorate, le frange di interferenza.

#### IX.4 - SOVRAPPOSIZIONE DI ONDE SINUSOIDALI.

In questo paragrafo studieremo la sovrapposizione di onde superficiali, quali sono quelle che si propagano sulla superficie dell'acqua contenuta in una bacinella. Sperimentalmente si vede che per esse vale il principio di sovrapposizione. Lo si può verificare facilmente facendo sovrapporre due onde e poi osservando che, oltrepassata la zona di sovrapposizione, ciascuna delle due onde riprende a propagarsi come se la sovrapposizione non fosse mai avvenuta.



Qui tratteremo solo la sovrapposizione di onde sinusoidali cilindriche aventi la stessa pulsazione ed i cui effetti avvengono per tutte secondo la verticale. nella stessa direzione. Come vedremo meglio più avanti, questa scelta ci permette di non tener conto degli effetti della diffrazione, in quanto i fronti d'onda, circolari, sono completi fino a quando non incontrano un qualche ostacolo.

L'equazione, che descrive punto per punto e istante per istante la propagazione di un'onda cilindrica, a grande distanza dalla sorgente, è:

$$z(r,t) = (A_0/\sqrt{r}) \cos (\omega(t - r/v) + \Psi)$$

L'intero argomento del coseno si esprime in radianti e rappresenta la fase dell'onda nel punto P a distanza r dalla sorgente all'istante t;  $z(r,t)$  rappresenta l'ampiezza dell'onda alla distanza r dalla sorgente all'istante t,  $A_0/\sqrt{r}$  rappresenta l'ampiezza massima dell'onda a distanza r,  $\omega$  la pulsazione temporale dell'onda (da cui si deriva la frequenza  $\nu = \omega/2\pi$  Hertz ed il periodo  $T = 1/\nu$  sec dell'onda),  $v$  la velocità di propagazione dell'onda e  $\Psi$  la fase dell'onda per  $t=0$  ed  $r=0$  (fase iniziale dell'onda).

Nella propagazione di un'onda sinusoidale si definisce anche la lunghezza d'onda  $\lambda$ , come  $\nu T$ , spazio percorso dall'onda in un periodo, che corrisponde anche alla distanza  $\Delta r$  tra due punti aventi fase che differisce di  $2\pi$ . Definito  $k = 2\pi/\lambda$  la equazione dell'onda si scrive anche:

$$z(r,t) = (A_0/\sqrt{r}) \cos (\omega t - kr + \Psi)$$

per la simmetria di  $k$  con  $\omega$ ,  $k$  viene detta pulsazione spaziale dell'onda.

Questa scelta ci permette inoltre di aiutarci con la esperienza, perché delle onde cilindriche si possono produrre sulla superficie dell'acqua contenuta in una bacinella immergendovi semplicemente ...un dito.

Poiché per le onde vale il principio di sovrapposizione, lo spostamento S dalla posizione di equilibrio risultante in un punto P dalla sovrapposizione di più onde in un certo istante si calcola come somma degli spostamenti che ciascuna onda produrrebbe in P nello stesso istante, come se le altre non ci fossero.

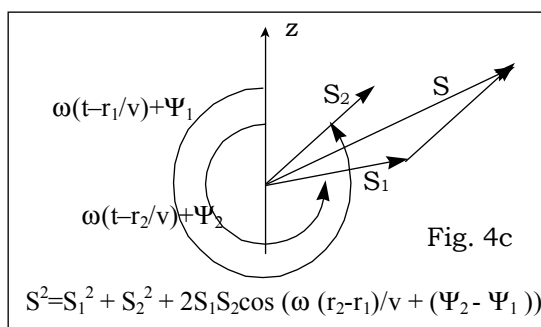
Immaginiamo ora che le sorgenti di onde cilindriche siano due, distanti  $h$  l'una dall'altra e sia  $P$  un punto qualunque della superficie sulla quale le onde si propagano, distante  $r_1$  dalla sorgente 1,  $r_2$  dalla sorgente 2. In  $P$ , le due onde produrranno due oscillazioni armoniche,

la prima di equazione :  $z_1(t) = (A/\sqrt{r_1})\cos(\omega(t - r_1/v) + \Psi_1)$

la seconda di equazione:  $z_2(t) = (A/\sqrt{r_2})\cos(\omega(t - r_2/v) + \Psi_2)$ .

Esse descrivono ( Fig. 4c) le proiezioni sull'asse  $z$  di due vettori  $\mathbf{S}_1$  ed  $\mathbf{S}_2$  di modulo  $A/\sqrt{r_1}$  ed  $A/\sqrt{r_2}$  rotanti con egual pulsazione  $\omega$  e fasi rispettivamente  $\omega t - (\omega r_1/v - \Psi_1)$  ed  $\omega t - (\omega r_2/v - \Psi_2)$ . Questi vettori rotanti sono detti **fasori** perché l'angolo tra essi rappresenta la differenza tra le fasi delle oscillazioni.

La funzione  $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$  rappresenta in funzione del tempo l'andamento (più precisamente **l'elongazione**) della oscillazione risultante dalla sovrapposizione delle due onde in  $P$ . Essa è ancora una oscillazione armonica proiezione sull'asse  $z$  del fasore  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$  la cui ampiezza massima è eguale al modulo di  $\mathbf{S}$  il cui quadrato, per il teorema del coseno è dato da:



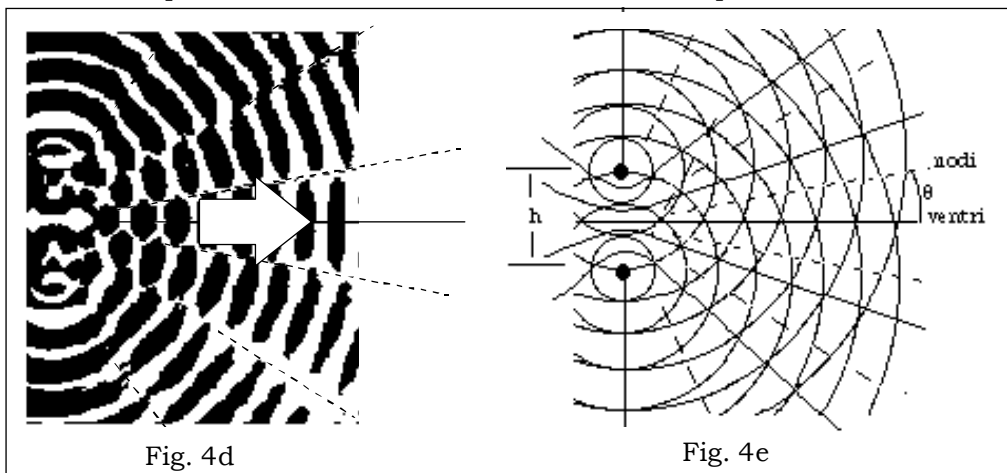
$$S^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{A^2}{r_1} + \frac{A^2}{r_2} + 2\frac{A^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\frac{\omega}{v}(r_2 - r_1) + (\Psi_2 - \Psi_1)\right)$$

Assumiamo, per semplicità, che sia  $\Psi_1 = \Psi_2$ , il che si realizza... realizzando le due sorgenti con due dita della stessa mano ed immergendole contemporaneamente. Per  $h \ll r$  per cui  $A^2/r_1 \cong A^2/r_2$ , si avrà  $S \approx 0$  in tutti i punti della superficie in cui le onde inducono oscillazioni differenza di fase  $(\omega/v)(r_2 - r_1) = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$  ecc.

Ricordando che  $\omega/v = 2\pi/\lambda$ , si ha  $S = 0$  in tutti i punti in cui:

$$r_1 - r_2 = \pm(2k + 1) \lambda/2 \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, \dots \text{etc.}$$

L'insieme di questi punti costituisce linee che si osservano facilmente sulla superficie della nostra bacinella sperimentale perché la superficie del liquido vi rimane pressochè immobile ( $S \cong 0$ ) in mezzo ad un fluire di onde tutto intorno. Questo andamento è illustrato in fig. 4d) ove dobbiamo immaginare le onde procedere dalle sorgenti entro canali delimitati dalle linee ove  $S=0$  e individuate come **linee dei nodi**. Tra esse troviamo le **linee dei ventri**, che uniscono i punti in cui le onde si sovrappongono costruttivamente, quindi in fase o con differenza di fase multipla intera di  $2\pi$ .



La figura 4d) si può osservare ad esempio proiettandola sul soffitto di una stanza generando le onde in una bacinella col fondo trasparente ed illuminata opportunamente dal basso; le zone chiare corrispondono a quelle in cui la luce non viene deviata perché la superficie dell'acqua risulta parallela al fondo.

La figura 4e) è ottenuta disegnando fronti d'onda centrati sulle due sorgenti e distanti  $\lambda$  (quindi corrispondenti a fasi che differiscono di  $0, 2\pi, 4\pi \dots$  ecc). Per i punti in cui si sovrappongono passano le **linee dei ventri**. Dove invece risultano essere equidistanti (distanza di mezza lunghezza d'onda) le due onde generano oscillazioni in opposizione di fase, o (il che ha lo stesso effetto di cancellazione) con differenza di fase  $\pm\pi, \pm3\pi, \dots$ , quindi passano le **linee dei nodi**.

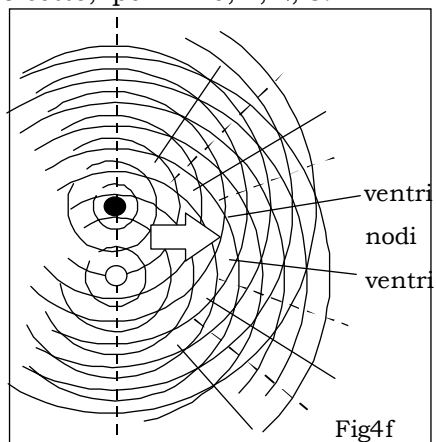
Le linee dei nodi e dei ventri sono in numero finito.

Infatti, le linee dei nodi sono iperboli, in quanto luoghi di punti per i quali la differenza tra le distanze dalle sorgenti è costante ( $r_1 - r_2 = \text{cost.}$ ). I fuochi delle iperboli sono localizzati nelle sorgenti. Gli asintoti delle linee dei nodi si ottengono osservando che, per  $r_1$  ed  $r_2 \gg h$  si può assumere :

$$r_2 - r_1 = \pm h \sin\theta = \pm(2k + 1) \lambda/2$$

da cui ricavano le direzioni degli asintoti nodali:  $\sin\theta = \pm(\lambda/h)(2k + 1)/2$  ( $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) purchè resti  $(\lambda/h)(2k + 1)/2 \leq 1$ . Nell'esempio di fig. 8c e d), ove  $h = 3\lambda$ ,  $k$  può arrivare fino a 2, per cui le linee nodali non possono che essere sei. Analogamente si ottengono le direzioni degli asintoti ventrali:  $\sin\theta = \pm k\lambda/h$ , che sono sette, per  $k = 0, 1, 2, 3$ .

L'andamento delle linee dei ventri e dei nodi descritto nelle figure 11d ed e) è caratteristico della sovrapposizione di due onde cilindriche aventi egual fase iniziale ( $\Psi_1 = \Psi_2$ ). Per fasi iniziali diverse, l'andamento delle linee dei nodi e dei ventri risulterà diverso a meno che le fasi iniziali non differiscano di multipli interi di  $\pm 2\pi$ . Ad esempio, in fig. 11f le due onde sono sfasate di  $\pi$ , cioè per esse si ha  $\Psi_1 - \Psi_2 = \pi$ . Le linee dei nodi si sono spostate là dove prima scorrevano le linee dei ventri, e viceversa. E' evidente che la nuova configurazione si può ricondurre ad un diverso sfasamento nella emissione da parte delle due sorgenti, che nel caso di fig. 4f potrebbe essere realizzato introducendo alternativamente le due dita sorgenti-delle-onde nell'acqua della bacinella in cui sperimentiamo.



Questa osservazione ci porta a sottolineare l'importanza che ha, per la stabilità della configurazione di linee dei ventri e dei nodi prodotta dalla sovrapposizione, la stabilità nel tempo dell'argomento del coseno ( $(\omega/\nu)(r_2 - r_1) + \Psi_2 - \Psi_1$ ).

Se questa grandezza dovesse variare nel tempo, vedremmo le nostre onde sovrapporsi con configurazioni di linee dei ventri e dei nodi che variano nel tempo. Se poi queste variazioni dovessero avvenire con grande rapidità, avremmo una sovrapposizione in cui l'unica grandezza sensata sarebbe la media temporale di  $S^2(r_1, r_2)$  che risulterebbe (valor medio del coseno = 0)

$$S^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{A^2}{r_1} + \frac{A^2}{r_2}$$

Questo effetto distruttivo può derivare da una troppo grande variabilità in  $\omega$ , assoluta e relativa, da una variabilità nella differenza delle fasi iniziali ( $\Psi_2 - \Psi_1$ ), da una variabilità nelle posizioni relative delle due sorgenti, ( $r_2 - r_1$ ). Questa stabilità, essenziale perché la sovrapposizione delle onde dia luogo ad una configurazione stabile di linee dei ventri e dei nodi va sotto il nome di **coerenza** delle onde che si sovrappongono.

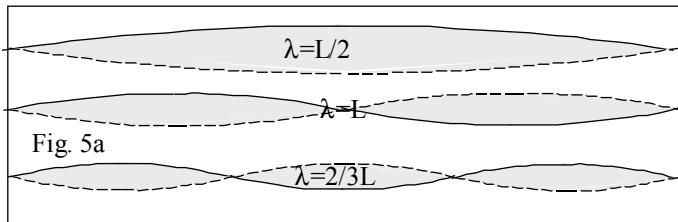
IX.5 - INTERFERENZA.

Normalmente la sovrapposizione della luce avviene in condizioni di non-coerenza, per cui la sovrapposizione non dà luogo a strutture stabili di linee dei nodi e dei ventri.

Nel paragrafo precedente ci siamo evidentemente preoccupati di studiare la sovrapposizione di onde in condizioni di coerenza, in modo da mettere in evidenza la necessità di questa condizione che equivale, in sostanza, a imporre che in una certa porzione di spazio la sovrapposizione di due (o più onde) deve avvenire punto per punto con rapporto di fase costante nel tempo tra le onde che si sovrappongono.

La famiglia dei fenomeni che derivano dalla sovrapposizione coerente di onde viene detta dei **fenomeni di interferenza**.

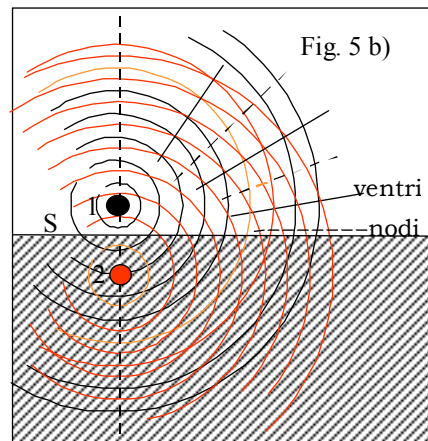
Ad esempio oltre ai fenomeni trattati nel paragrafo precedente, sistemi stabili di nodi e ventri, quindi fenomeni di interferenza, si producono eccitando delle vibrazioni su una corda tesa fissata ai due estremi (Fig. 5a). Si tratta di onde che viaggiano nei due sensi riflettendosi sui due estremi fissi della corda, ove si formano dei nodi. Si tratta di **onde stazionarie**, caratterizzate da uno spettro discreto di possibili lunghezze d'onda, e quindi di frequenze ( $v=\lambda v$ ). Ad esempio in fig. 5a, ove la corda ha lunghezza L, le lunghezze d'onda possibili debbono soddisfare la relazione  $L=n\lambda/2$ .



Sistemi analoghi di onde stazionarie si producono in una canna d'organo o sulla membrana di un tamburo, ove agli estremi possiamo trovare localizzati nodi o ventri.

La limitazione sulle  $\lambda$  per cui è possibile osservare fenomeni di interferenza non esiste nel caso in cui un'onda si sovrapponga a sé stessa dopo aver subito una (sola) riflessione.

Di fatto, la riflessione delle onde provenienti da una sorgente costituisce il metodo principe per crearne una eguale che pertanto emette luce coerente colla prima e quindi permette di osservare fenomeni di interferenza. Tutto avviene come se le sorgenti fossero due di cui, nel caso particolare di fig. 5b), una sfasata di  $\pi$  rispetto all'altra perché abbiamo assunto che all'atto della riflessione l'onda subisse uno sfasamento di  $\pi$ . Questo sfasamento avviene in molti casi (ad esempio in fig. 12a) ma non sempre. Ad esempio per la riflessione di onde superficiali su una parete non avviene, per cui la configurazione delle linee dei nodi e dei ventri risulterebbe quella di fig. 4e).



La sorgente 2, con linguaggio mutuato dall'ottica geometrica, rappresenta una sorgente virtuale, immagine virtuale di 1.

Fin qui ci siamo limitati a considerare onde che si propagano in uno spazio uni o bi-dimensionale.

Se le onde sono prodotte, ad esempio, da sorgenti puntiformi (o approssimabili come puntiformi) in uno spazio tridimensionale, valgono gli stessi principi colle opportune varianti del caso.

Dovremo immaginare che le sorgenti emettano onde sferiche che, sovrapponendosi, daranno luogo ad una configurazione di nodi e ventri distribuiti non più su linee, ma su superfici.

Se ad esempio le sorgenti sono due, al posto delle linee con andamento iperbolico avremo delle superfici costituite da iperboloidi di rotazione aventi come asse la linea individuata dalle due sorgenti.

Se le sorgenti emettono onde in concordanza di fase, gli iperboloidi rappresentati in fig. 5c rappresenteranno il luogo dei nodi, se le sorgenti

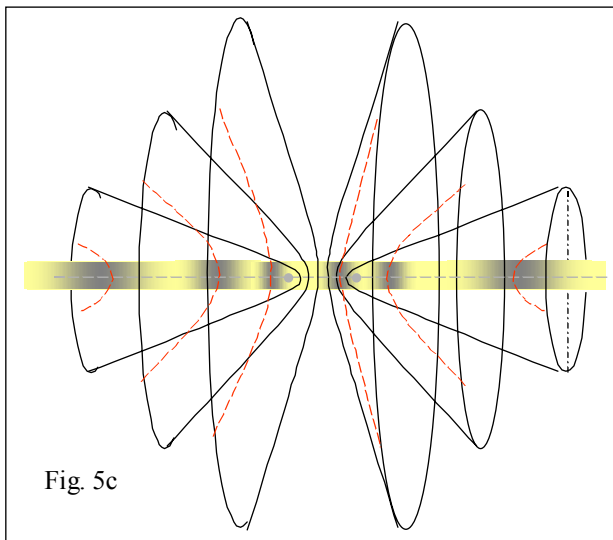


Fig. 5c

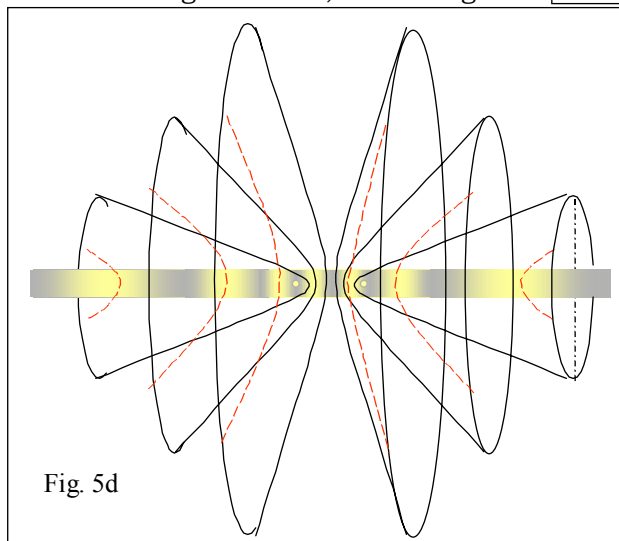


Fig. 5d

emetteranno luce in opposizione di fase (Fig. 5d), gli stessi iperboloidi rappresenteranno il luogo dei ventri.

Queste considerazioni assumono grande importanza se le onde che mandiamo ad interferire sono onde luminose.

La intersezione di questi iperboloidi con un piano è costituita infatti da una famiglia di coniche (tratteggiate in 12c e 12d) che, nel caso in cui le due sorgenti emettano luce coerente ed il piano sia uno schermo sul quale la luce va ad incidere, appariranno sullo schermo come luoghi di frange oscure (nodi, fig. 5c) su un fondo brillantemente illuminato (ventri) o come frange brillantemente illuminate (ventri, fig. 5d) su un fondo scuro (nodi). Una striscia di questo piano è rappresentata nei due casi in fig. 5c e fig. 5d.

Se le due sorgenti non dovessero emettere luce coerente, questa si sovrapporrebbe sullo schermo illuminandolo con una intensità ( $S^2 = \text{somma dei quadrati delle ampiezze}$ ) eguale alla somma delle intensità con cui ciascuna sorgente lo illuminerebbe da sola. E' evidente che nel caso della sovrapposizione coerente, lo schermo sarebbe illuminato con una intensità ( $S^2 = \text{somma delle ampiezze elevata al quadrato}$ ), quindi sarebbe modulata dal termine in coseno. L'energia che per unità di tempo arriva sullo schermo è evidentemente la stessa nei due casi, solo che la ritroviamo diversamente distribuita.

IX.6 – FRANGE NON LOCALIZZATE. L'ESPERIENZA DI YOUNG.

Immaginiamo due sorgenti di luce fisicamente diverse, costituite ad esempio da due capocchie di spillo portate all'incandescenza. Due raggi di luce, provenienti dalle due sorgenti, si sovrappongono in un punto P dello spazio, Ad una componente del raggio 1 corrisponderà una componente, ad essa parallela proveniente dalla sorgente 2. La sovrapposizione di queste due componenti sarà descritta da

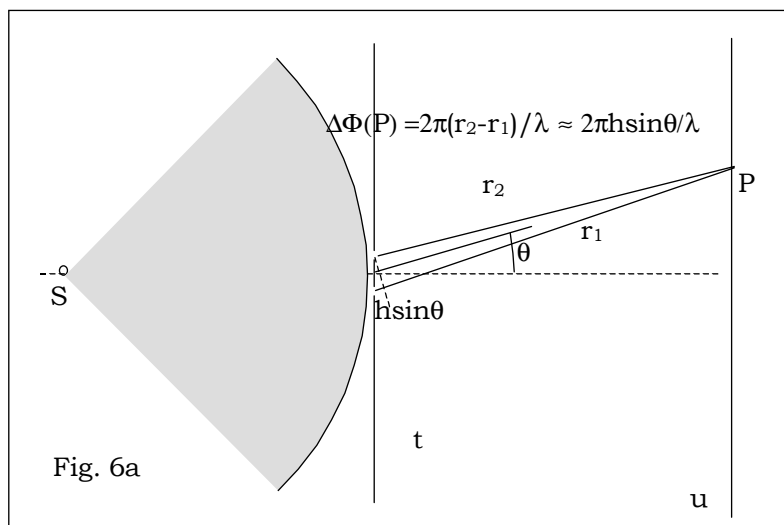
$$S^2(r_1, r_2) = \frac{A_1^2}{r_1} + \frac{A_2^2}{r_2} + 2 \frac{A_1 A_2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\frac{\omega}{v}(r_2 - r_1) + (\Psi_2 - \Psi_1)\right)$$

se le due sorgenti emettono luce con la stessa pulsazione. Una seconda componente presente nel raggio 1 si sovrapporrà ad una seconda componente del raggio 2 ed anche se le ampiezze dovessero essere le stesse della prima coppia, la differenza di fase (l'argomento del coseno) con cui si sovrappongono sarà diversa. Pertanto l'intensità della luce in P sarà semplicemente la somma delle intensità delle due sorgenti prese una alla volta, in quanto il valor medio del coseno, calcolato per tutte le coppie, sarà eguale a zero.

La luce proveniente da due sorgenti di luce fisicamente distinte si sovrappone sempre in maniera incoerente.

Per osservare una interferenza bisogna sovrapporre onde coerenti, cioè che si sovrappongono a due a due sempre con la stessa differenza di fase. Il suggerimento sul come fare ci viene dalla adozione di un principio di Huygens in cui alle onde impulsive sostituiamo onde sinusoidali. In questo caso possiamo immaginare una sorgente di luce S puntiforme, che in un mezzo isotropo si disaccetta emettendo un'onda sferica sinusoidale. Se poniamo sul cammino di quest'onda uno schermo t nel quale avremo praticato due forellini distanti h, l'onda trasformerà automaticamente questi due forellini in due sorgenti (fittizie, di Huygens) che emettono a loro volta onde sferiche. In un punto qualunque dello spazio a valle dello schermo le due onde si sovrapporranno con differenza di fase costante nel tempo ( $\Delta\Phi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$ ). Più in generale, nello spazio a valle dei forellini avremo superfici iperboliche sulle quali la luce proveniente dai due forellini si sovrappone con intensità quattro volte quella che ci aspetteremmo in quel punto da un solo forellino, alternatisi con superfici iperboliche sulle quali la luce proveniente dai due forellini si sovrappone in modo distruttivo.

Su un secondo schermo u potremo dunque identificare le intersezioni di questi iperboloidi con lo schermo come frange luminose alternantisì a frange oscure. Poiché esse si osservano solo su uno schermo posto ovunque nello spazio illuminato dai due forellini, ma non direttamente coll'occhio, esse sono anche dette frange non localizzate (l'occhio mette a fuoco sulla retina solo frange localizzate su un piano).



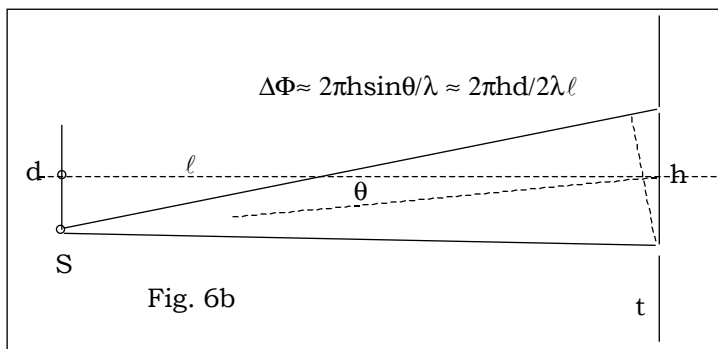
L'esperienza descritta è più facile a dirsi che a farsi. Sappiamo che le direzioni degli asintoti ventrali sono date dalla formula  $h \sin \theta = n \lambda$ , per cui la distanza angolare tra gli asintoti di ordine zero, 1 2 è data da  $\theta \approx \lambda/h$ . Pertanto, su uno schermo posto a distanza  $r$  dai forellini le frange distano di  $\Delta = r \theta = r \lambda/h$ .  $\lambda$  è fissato, ed è dell'ordine dei  $.5 \mu$ , per cui per  $h=1 \text{ mm}$  e  $r = 1000 \text{ mm}$  si ottiene  $\Delta = 0,5 \text{ mm}$ . Le frange sono molto vicine, e per osservarle bisogna usare una lente di ingrandimento.

Inoltre non esistono sorgenti puntiformi. Una sorgente estesa, di diametro  $d$ , si comporta come una sorgente puntiforme, cioè come una sorgente di onde sferiche, solo entro l'angolo  $\alpha = \lambda/2d$ .

Per dimostrarlo osserviamo le onde sferiche che attraversano due forellini infinitamente piccoli essendo state generate da una sorgente puntiforme posta sull'asse dei due forellini sono sempre in concordanza di fase.

Le onde sferiche provenienti da una sorgente estesa, di diametro  $d$ , raggiungeranno i due forellini con una differenza di fase  $\Delta \Phi$  che è zero quando la sorgente (puntiforme) dell'onda sferica si trova al centro della sorgente estesa, ed aumenta aumentando la distanza dal centro. Si ha  $\Delta \Phi \approx 2\pi h \sin \theta / \lambda \approx 2\pi h d / 2\lambda \ell$  In dove  $\ell$  è la distanza tra la sorgente ed i forellini.

L'esperienza insegna che la sorgente si può considerare puntiforme se  $\Delta \Phi$ , quale che sia il punto della sorgente da cui parte l'onda sferica, risulta sempre minore di  $\pi/4$ . Pertanto, per  $2\pi h d / 2\lambda \ell < \pi/4$  si ha che  $h/\ell$ , l'angolo sotto il quale i due forellini sono visti dal centro della sorgente, deve essere minore di  $\lambda/2d$ .



In conclusione, per vedere delle frange con una sorgente reale di diametro  $d$ , i forellini debbono distare di  $h \approx \ell \lambda / 2d$ . Nel nostro esempio, essendo  $h=1 \text{ mm}$ , si ottiene che la sorgente può essere estesa ma avere diametro  $d$  non superiore a  $250 \mu$ .

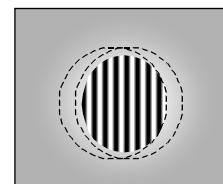
Infine, anche i forellini avranno un diametro  $\delta$  non nullo, per cui le onde che ne fuoriescono risentono di questa incertezza nella posizione della sorgente fittizia dell'onda sferica.

Si può naturalmente ripetere il ragionamento fatto per la sorgente reale, per ottenere che i due forellini possono essere considerati puntiformi per onde emesse entro l'angolo  $\theta = \lambda/2\delta$ . Per  $\delta$  dell'ordine dei  $100 \mu$ . Ad un metro di distanza, avremo la sovrapposizione di due fronti d'onda sferici del diametro di  $2,5 \text{ mm}$  i cui centri distano di  $1 \text{ mm}$ . In questa zona si osserveranno le frange, che sappiamo distano di  $.5 \text{ mm}$ , quindi se ne vedranno solo alcune.

In pratica l'apertura angolare dei fronti d'onda sferici è doppia di quella calcolata in quanto le onde che incidono sui forellini sono già coerenti, mentre il calcolo fatto vale per sorgenti fisicamente distinte, quindi completamente incoerenti.

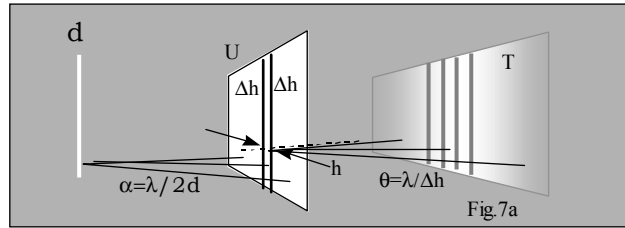
I fronti d'onda che si sovrappongono sono quindi di  $5 \text{ mm}$  di diametro ed i loro centri distano di  $1 \text{ mm}$ , quindi l'area di sovrapposizione coerente è di  $4 \text{ mm}$  di diametro. In quest'area si conteranno una decina di frange,

L'esperienza riuscì per la prima volta a Thomas Young, agli inizi del 1800, ed è servita a confermare Young nell'idea che la luce fosse un fenomeno ondulatorio sinusoidale di lunghezza d'onda inconcepibilmente piccola.



IX. 7 – L'ESPERIENZA DI YOUNG CON DELLE FENDITURE.

L'esperienza di Young riesce molto meglio se, al posto dei forellini, si utilizzano delle fenditure. La ragione è che un forellino, entro l'angolo di coerenza, si comporta come una sorgente di onde sferiche mentre una fenditura, entro l'angolo di coerenza, si comporta come una sorgente di onde cilindriche. Poiché l'ampiezza delle onde sferiche varia come  $1/r$ , mentre l'ampiezza delle onde cilindriche varia come  $1/\sqrt{r}$ , l'intensità delle frange che si producono è molto maggiore se si esegue l'esperienza con delle fenditure.



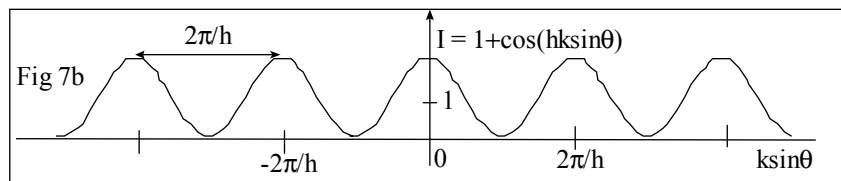
In fig. 7a è rappresentata l'esperienza di Young fatta utilizzando delle fenditure. Come si vede, le caratteristiche fondamentali della esperienza restano immutate; date due sorgenti di onde cilindriche, di lunghezza d'onda  $\lambda$ ,  $k=2\pi/\lambda$ , distanti  $h$ , la relazione che fornisce la intensità delle frange risultanti dalla interferenza, se le due sorgenti oscillano colla stessa ampiezza e frequenza, in funzione del punto distante  $r_1$  dalla prima,  $r_2$  dalla seconda, nel piano ortogonale alle fenditure, è:

$$I = \frac{A^2}{r_1} + \frac{A^2}{r_2} + 2 \frac{A^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\frac{\omega}{v} (r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1)\right)$$

che a grande distanza dalle sorgenti, assunto che oscillino in concordanza di fase, quindi per  $\phi_1 - \phi_2 = 0$ , diventa:

$$I = 2 \frac{A^2}{r} (1 + \cos(hk \sin \theta))$$

il cui diagramma è rappresentato in fig. 7b.



I diagrammi di

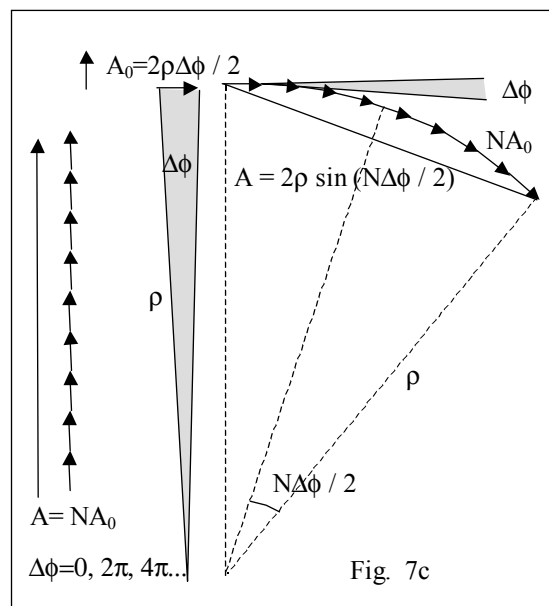
questo tipo si rappresentano in funzione della variabile universale  $k \sin \theta$  in quanto, in questo modo, essi diventano indipendenti dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  delle onde che interferiscono. La legge che fornisce le direzioni asintotiche delle frange risulta essere sinusoidale di periodo  $P = 2\pi/h$  nella variabile  $k \sin \theta$ .

Se invece di due abbiamo  $N$  fenditure parallele, equidistanti, tutte della stessa larghezza  $h$  (e lunghezza  $\gg h$ ) l'intensità delle frange in direzione  $\theta$ , a grande distanza dalle fenditure, si ottiene con il metodo grafico seguente:

Sia  $A_0$  l'ampiezza di una delle onde a distanza molto grande (infinita) dalla sorgente.

Qui avviene la sovrapposizione di  $N$  ampiezze, l'una sfasata rispetto alla seguente di  $\Delta\phi = 2\pi h \sin \theta / \lambda = h k \sin \theta$ .

In fig. 7c sono rappresentate queste  $N$  ampiezze per  $\Delta\phi=0, 2\pi, 4\pi, \dots$  ecc ed hanno risultante  $NA_0$ .



Nella stessa figura sono poi rappresentate le stesse  $N$  ampiezze, sfasate di un  $\Delta\phi$  generico. Esse formano una poligonale regolare che può essere inscritta in un cerchio di raggio  $\rho$ , e l'arco in cui sono inscritte sottende un angolo eguale ad  $N\Delta\phi$ .

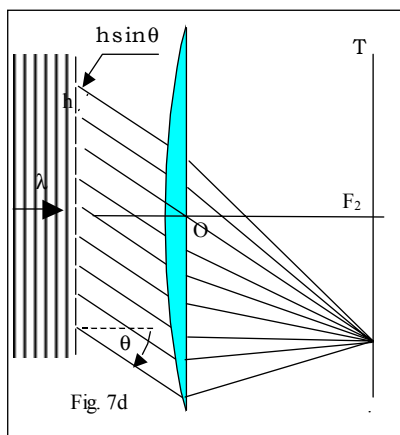
Dalla figura è evidente che :

$$A = 2\rho \sin(N\Delta\phi/2) \quad \text{mentre} \quad A_0 = 2\rho \sin(\Delta\phi/2).$$

Dividendo membro a membro si ottiene, pertanto  $A = A_0 \sin(Nh k \sin\theta) / \sin(h k \sin\theta)$  da cui

$$I(k \sin\theta) \propto \left[ \frac{\sin \frac{N h k \sin\theta}{2}}{\sin \frac{h k \sin\theta}{2}} \right]^2$$

La funzione  $I(k \sin\theta)$  ha i picchi di massima intensità ( $A^2 = N^2 A_0^2$ ) nello stesso punto in cui si trovano quelli osservati per  $n=2$ , solo la larghezza dei picchi decresce all'aumentare di  $N$  in quanto il primo minimo, dopo un massimo, si trova per  $N h k \sin\theta / 2 = \pi$  quindi per  $k \sin\theta = 2\pi / N h$ .



Osservare la distribuzione angolare di queste frange ponendo uno schermo all'infinito non ha senso, ma si può ricorrere all'artificio ottico di porre, a valle delle sorgenti, una lente convergente con l'asse perpendicolare al piano delle fenditure, e lo schermo  $T$  di osservazione sul piano focale della lente medesima.

Nei punti in cui il raggio di inclinazione  $\theta = \arcsin(n\lambda/h)$  passante per il centro ottico interseca il piano focale della lente troveremo i picchi di intensità predetti dalla teoria. La lente infatti non cambia la differenza di fase con cui due onde, provenienti da due fenditure diverse e dirette in direzione  $\theta$ , si sovrapporrebbero a distanza infinita dalla lente quando queste

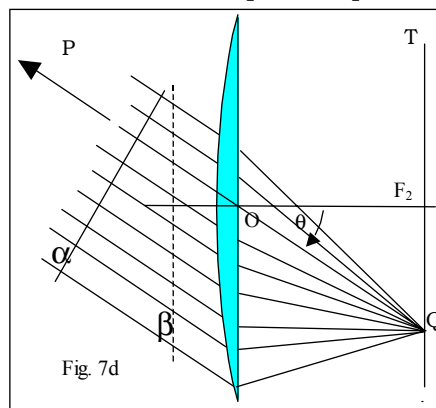
si sovrappongono sul piano focale di una lente.

Per dimostrarlo osserviamo fig. 7e, dove abbiamo fatto la costruzione geometrica della immagine di un punto  $P$  che si trova a distanza infinita dalla lente, in direzione  $\theta$  rispetto all'asse. L'immagine di  $P$  si trova sul piano focale della lente, nel punto in cui il raggio proveniente da  $P$  passante per il centro ottico  $O$  della lente ne interseca il piano focale.

I raggi che da  $P$  raggiungono il piano  $\alpha$  hanno percorso tutti lo stesso cammino ottico  $U$ .

Per il principio di Fermat, i raggi che partiti da  $P$  raggiungono il piano focale nel punto  $Q$ , immagine di  $P$ , hanno anch'essi percorso un egual cammino ottico  $U'$ . Pertanto i raggi uscenti da  $\alpha$  in direzione  $\theta$ , quando convergono in  $Q$ , avranno anch'essi percorso lo stesso cammino ottico  $\Delta U = U' - U$ .

Consideriamo ora i raggi uscenti secondo  $\theta$  dal piano  $\beta$  delle fenditure. Essi convergono in  $Q$  ma non hanno percorso lo stesso cammino ottico. La differenza di cammino tra uno di essi ed il successivo è  $h \sin\theta$ , la stessa con cui si sovrapporrebbero all'infinito, c.d.d.



IX.8 - DIFFRAZIONE AD UNA FENDITURA. SPIEGAZIONE DI FRESNEL.

Le esperienze descritte fin qui in cui si sostituisce una sorgente di luce con un forellino, o una fenditura, dimostrano che anche se la fenditura di per sé non è un sorgente di luce, quando è illuminata da dietro funziona allo stesso modo. E' abbastanza naturale che, di fronte a questa evidenza, sia stato riesumato il principio di Huygens secondo il quale un fronte d'onda, in un istante qualunque della sua propagazione, si può considerare costituito da un mosaico di sorgenti infinitesime che emettendo onde sferiche permettono di calcolare graficamente la forma dello stesso fronte d'onda t secondi più tardi.

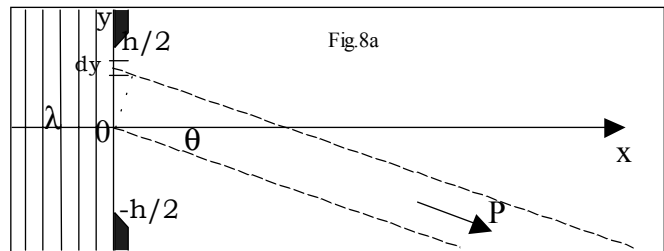
L'enunciato di Huygens, concepito per onde impulsive, longitudinali, viene quindi riformulato negli stessi termini sostituendo semplicemente alle onde impulsive onde sinusoidali ed alla tecnica dell'involuppo i concetti dell'interferenza.

La formalizzazione di questa riesumazione si ha con l'enunciazione del **principio di Huygens-Fresnel**. Una qualunque superficie geometrica investita da un treno d'onde si considera suddivisa in tante sorgenti elementari (sorgenti fittizie) che emettono onde sferiche la cui ampiezza è proporzionale all'ampiezza dell'onda incidente, mentre frequenza e fase sono le stesse dell'onda incidente. Per ottenere un miglior accordo con i dati sperimentali viene inoltre introdotto un "**fattore di obliquità**", che regola l'ampiezza dell'onda sferica in funzione della orientazione della superficie della sorgente fittizia, della direzione di incidenza dell'onda e della direzione in cui se ne considera la propagazione. In sostanza Fresnel intuisce quasi un secolo prima quanto Kirchoff dedurrà dalle equazioni di Maxwell per la propagazione dei potenziali, incluso il fattore di obliquità che risulterà identico salvo lo sfasamento di  $\pi/2$  presente nella formula di Kirchoff che però è, evidentemente, ininfluente.

Armato di questa tecnica Fresnel può rivisitare tutta l'ottica, in particolare fornire una spiegazione convincente dei fenomeni di diffrazione, sia al finito (diffrazione di Fresnel) che a distanza infinita dall'ostacolo (diffrazione di Fraunhofer).

Particolarmente semplice è la trattazione della diffrazione di Fraunhofer di un'onda piana incidente normalmente su una fenditura.

Per ottenere l'andamento delle intensità della luce diffratta a distanza infinita dalla apertura in funzione dell'angolo facciamo riferimento a fig. 8a), ove sono rappresentati gli elementi fondamentali del calcolo. La fenditura è rappresentata in sezione, quindi col lato lungo perpendicolare alla figura.



Per l'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incidente su una apertura di larghezza h si vuole l'ampiezza dell'onda diffratta in P, a distanza infinita dalla apertura, quindi visto dalla apertura nella direzione  $\theta$ .

Dividiamo il fronte d'onda all'altezza dell'apertura in tante sorgenti infinitesime di coordinata y ed ampiezza dy. Le ampiezze massime delle onde che arrivano in P dalle sorgenti di coordinate 0,0 e di coordinate 0,y saranno praticamente eguali per cui, a meno di un comune termine di fase che assumeremo per ambedue eguale a zero gli andamenti temporali delle due onde in P saranno, rispettivamente:

$$A(\theta,0,t) \propto A_0 \cos \omega t, \quad A(\theta,y,t) \propto A_0 \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} y \sin \theta \right)$$

Per l'ampiezza  $R(\theta, t)$  risultante dalla sovrapposizione in P di tutte le onde emesse dalle infinite sorgenti fittizie di larghezza  $dy$  in cui abbiamo diviso l'apertura avremo pertanto:

$$R(\theta, t) \propto \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} y \sin\theta\right) dy$$

La funzione integranda, sviluppata colle formule di addizione, diventa:

$$\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} y \sin\theta\right) = \cos\omega t \cos\frac{2\pi}{\lambda} y \sin\theta - \sin\omega t \sin\frac{2\pi}{\lambda} y \sin\theta$$

Il secondo termine è una funzione dispari di  $y$  per cui integrato tra  $-h/2$  ed  $h/2$  dà zero. Risulta:

$$R(\theta, t) \propto \cos\omega t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos(k \sin\theta, y) dy = \cos\omega t \cdot A(k \sin\theta, y) \quad \text{avendo posto } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ad integrazione effettuata si ottiene:

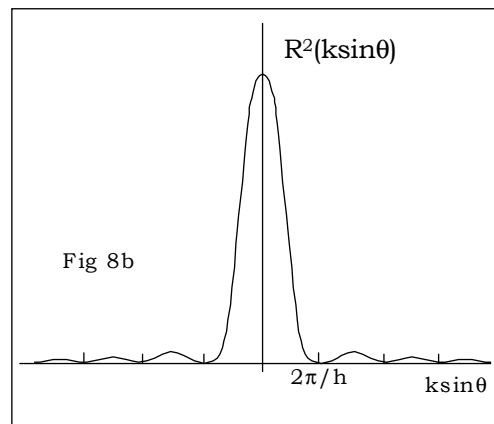
$$R(\theta, t) \propto \frac{\cos\omega t \cdot 2 \sin\left(\frac{h}{2} k \sin\theta\right)}{k \sin\theta}$$

che quadrata e mediata su un periodo fornisce la intensità media dell'onda nella direzione  $\theta$ :

$$R^2(\theta) \propto \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2} k \sin\theta\right)}{\left(\frac{h}{2} k \sin\theta\right)^2}$$

La funzione che rappresenta l'intensità dell'onda diffratta ad una fenditura di larghezza  $h$ , a grande distanza dalla fenditura, ha dunque un massimo per  $\theta=0$  per poi scendere a zero per  $\sin\theta = \lambda/h$ , dove risale per raggiungere un nuovo massimo, molto meno intenso del primo, per poi annullarsi di nuovo per  $\sin\theta = 2\lambda/h$  e così via.

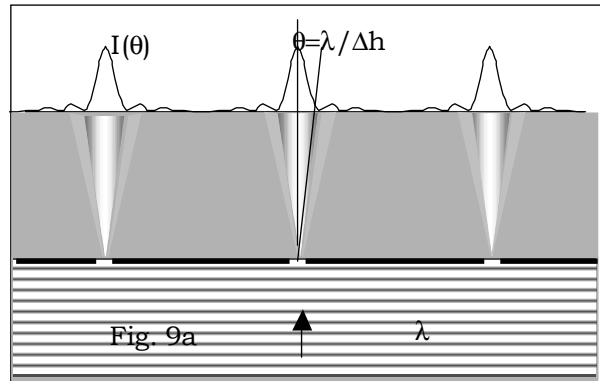
Come si vede la larghezza angolare del picco centrale, che è quello che normalmente si osserva perché più intenso, è anticorrelata con la larghezza  $h$  della fenditura. La diffrazione introduce, in un fascio di luce perfettamente parallela che attraversa una apertura di diametro  $h$ , una divergenza inversamente proporzionale alla larghezza della apertura stessa. Questa divergenza fa sì che se intercettiamo un fascio di luce parallela con una lente di diametro  $h$ , i raggi che convergerebbero, per l'ottica geometrica, sul fuoco, vi disegnano un dischetto che, per una apertura circolare, risulta essere  $1,22 f (\lambda/h)$ .



Analogamente l'immagine di una stella osservata al telescopio non ha nulla a che fare con il diametro della stella in quanto è costituita dal dischetto di diffrazione proprio di quello strumento.

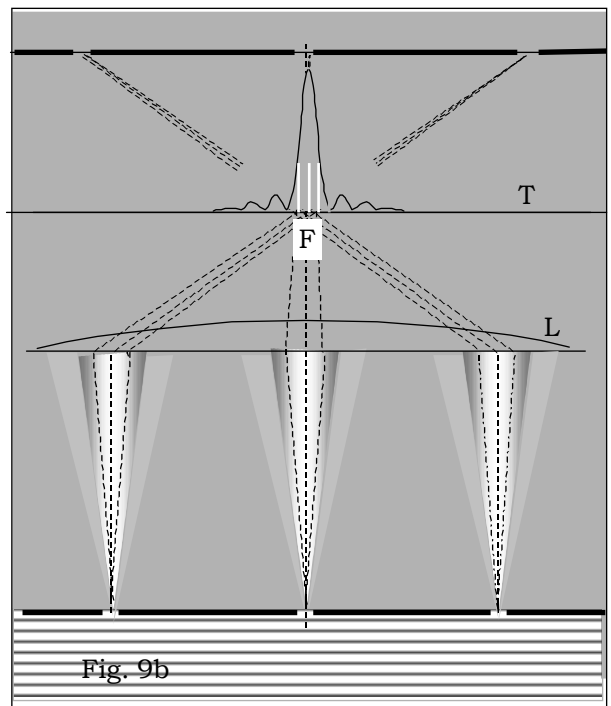
IX.9 - LA DIFFRAZIONE MODULA L'INTENSITA' DELLE FRANGE DI INTERFERENZA.

In fig. 9a è rappresentata una serie di tre fenditure investite da un'onda piana. La luce diffratta da ciascuna fenditura, a distanza abbastanza grande da essa, assumerà un andamento delle intensità funzione dell'angolo descritto dalla funzione  $I(\theta)$  ricavata al paragrafo precedente. Essa sarà descritta da una serie di picchi di intensità di cui il principale, per  $\theta = 0$ , si annulla per  $\theta = \lambda / \Delta h$ . Se spostiamo sempre più lontano il piano sul quale raccogliamo la luce diffratta dalle fenditure, le vedremo allargarsi e sovrapporsi sempre più finché la distanza tra le fenditure risulterà trascurabile rispetto alla distanza fenditure schermo, e le tre figure di diffrazione, diventate molto estese, appariranno sovrapposte. Dato che le sorgenti sono coerenti, dalla sovrapposizione delle ampiezze delle onde provenienti dalle tre fenditure si avrà interferenza, per cui la figura di diffrazione delle tre fenditure verrà solcata da frange di interferenza "à la Young". L'andamento risultante della interferenza modulato dalla diffrazione sarà dato dal prodotto  $I(k\sin\theta) \cdot I_D(k\sin\theta)$  ove



$$I(k\sin\theta) \propto \left[ \frac{\sin \frac{N h k \sin\theta}{2}}{\sin \frac{h k \sin\theta}{2}} \right]^2 \quad I_D(k\sin\theta) = \left[ \frac{\sin \frac{\Delta h k \sin\theta}{2}}{\frac{\Delta h k \sin\theta}{2}} \right]^2$$

con  $N=3$  e  $\Delta h$  larghezza delle fenditure. Possiamo osservare questo processo di modulazione dei picchi di interferenza introducendo in valle delle fenditure una lente convergente. Le figure di diffrazione delle tre fenditure si sovrapporranno esattamente sul piano focale della lente dando luogo ai picchi di interferenza secondo la  $I(k\sin\theta)$  la cui intensità decrescerà però come  $I_D(k\sin\theta)$ . Questi picchi si osserveranno interponendo, sul piano focale della lente, uno schermo sul quale osservarli. In fig. 6b è rappresentata la costruzione geometrica di questo processo, mentre la modulazione vi è simboleggiata rappresentandovi solo i tre picchi di interferenza che cadono entro il picco principale di diffrazione delle fenditure. La costruzione è basata sul fatto che i raggi diffratti deviati dalla lente, se potessero attraversare il piano focale della medesima (rimovendo lo schermo T), andrebbero a formare l'immagine delle tre fenditure.



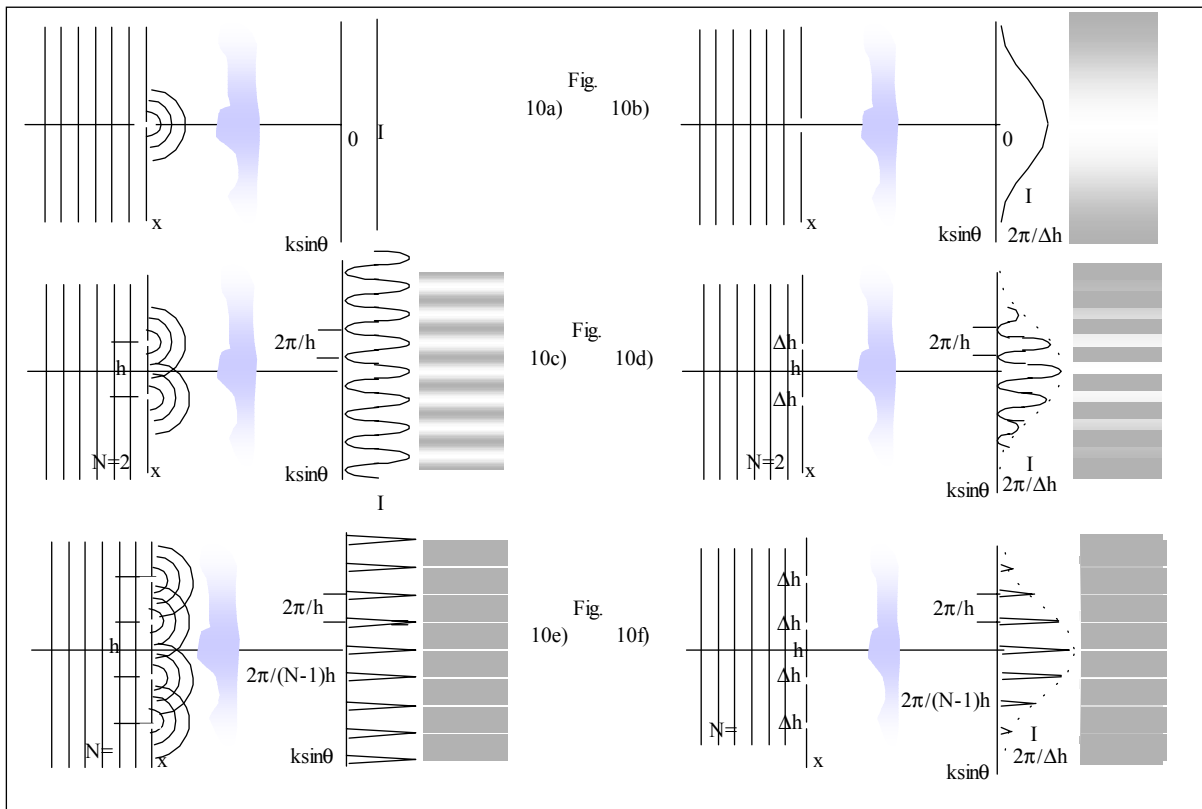
IX.10 – SOMMARIO.

La figura che segue illustra, in sintesi, quanto detto fin qui sul problema della sovrapposizione di onde di luce a distanza infinita dalla sorgente.

In fig. 10a) un qualunque elemento di fronte d'onda di onda piana si assume (principio di Huygens Fresnel) sorgente di onde sferiche (o, come faremo per il resto della figura, ove assumeremo sorgenti filiformi perpendicolari alla figura) onde cilindriche.

In Fig. 10c) è sintetizzata la sovrapposizione di onde prodotte da due sorgenti distanti  $h$ , coerenti e in fase. L'interferenza produce, a distanza  $\gg h$ , onde la cui intensità varia sinusoidalmente in funzione della variabile  $k\sin\theta$ , onde che ammesso di poterne osservare gli effetti su uno schermo posto sul loro cammino, vi darebbero luogo a frange chiare e oscure di pari larghezza,

In fig. 10e) è sintetizzato lo stesso fenomeno di interferenza quando è prodotto da più sorgenti equidistanti. Se la loro distanza è ancora  $h$ , le frange non si spostano rispetto al caso di due sole sorgenti, ma le frange luminose si assottigliano.



Nelle figure 10b, 10d, 10f) sono sintetizzati gli effetti di una larghezza finita della sorgente, nell'ipotesi che si tratti di una fenditura di larghezza  $\Delta h$  che produce luce diffratta. La diffrazione modula l'andamento ideale dei picchi di interferenza, dato da:

$$I(k\sin\theta) = \left[ \frac{\sin \frac{Nhk\sin\theta}{2}}{\sin \frac{hk\sin\theta}{2}} \right]^2$$

colla espressione della diffrazione ad una fenditura di larghezza  $\Delta h$ :

$$I_D(k\sin\theta) = \left[ \frac{\sin \frac{\Delta hk\sin\theta}{2}}{\frac{\Delta hk\sin\theta}{2}} \right]^2$$